Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica
1º Semestre — 21 Dez. 2006

Nome:	
Número:	Curso:

Duração: 30M
Cotação das perguntas de escolha múltipla: Correcta: 0,7 v. Errada: -0,2v.
Instruções:

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- Não é permitido usar calculadoras.
- Todas as perguntas devem ser respondidas neste enunciado.

A preencher pelo docente

Correctas	Erradas		Total esc. múlt.:	
1a).	1b).	1c).	4a) b).	4c) d)
Nota:				

---

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por **[1.3]**

$$T(x, y, z) = (x + 2y + z, 2x + 4y + 2z).$$

a) Escreva a matriz A que representa T em relação às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

b) Indique uma base do núcleo de T.

c) Indique, se existir, um vector de $\mathbb{R}^2$ que não pertença à imagem de T.

Resolução:
a) Seja Bc=(e_1, e_2, e_3) a base canónica de $\mathbb{R}^3$, onde $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$. Por definição de T, temos que $T(e_1) = (1, 2)$, $T(e_2) = (2, 4)$ e $T(e_3) = (1, 2)$, pelo que $A = M(T; Bc, Bc) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

b) Temos Nuc(T)=Nuc(A) uma vez que A representa T nas bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Facilmente se conclui que $\{(-2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é uma base do núcleo de A.

c) Encontrar um vector $v = (a, b)$ tal que $v \notin \mathrm{Im}(T)$ é equivalente a encontar $v = (a, b)$ que não pertença ao EC(A), i.e. o sistema cuja matriz aumentada é $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 4 & 2 & b \end{array}\right]$ tem de ser impossível. Qualquer vector (a, b) tal que $2a - b \neq 0$ será uma resposta ao pedido em c), como p.ex. $v = (1, 0)$.

PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

---

2. Considere a seguinte lista de funções: **[0.7]**

$T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $(x, y) \to (\sqrt{2}x - \sqrt{3}y, -\frac{1}{2}x + y)$.

$T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x, y) \to ||(x, y)||$.

$T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_3(x, y, z) = (x - 2, y + z + 1)$.

$T_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $v \to 2v$.

A lista **completa** das que são transformações lineares é

☐ T_1, T_2 e T_4 ☐ T_4 ☒ T_1 e T_4 ☐ T_2 e T_3.

---

3. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear tal que a dimensão do núcleo de T é 3. **[0.7]**

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

☐ T é injectiva.
☒ A dimensão da imagem de T é 2.
☐ A dimensão da imagem de T é 1.
☐ T é sobrejectiva.

Comentário:
Como dim Nuc(T)=3$\neq$ 0 concluimos que T não é injectiva. Pelo teorema da dimensão:

$$dim(Nuc(T)) + dim(Im(T)) = dim(\mathbb{R}^5)$$

porque o espaço de partida de T é $\mathbb{R}^5$. Como sabemos que dim Nuc(T)=3, concluimos que dim(Im(T))=2. Além disso, T não é sobrejectiva porque dim(Im(T)) não é igual à dimensão do espaço de chegada (=4).

FIM DAS PERGUNTAS DE ESCOLHA MÚLTIPLA

---

4. Considere no espaço vectorial P_2 dos polinómios a uma variável t com coe- **[0.8]**

ficientes reais e grau menor ou igual a 2 a base $\mathcal{B} = (1, t, t^2)$ e a transformação linear $T : P_2 \to P_2$ cuja matriz em relação à base $\mathcal{B}$ é $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são correctas:

a) T é sobrejectiva.

b) T admite vectores próprios.

c) $T(t + t^2) = 3 + 6t + 3t^2$

d) Uma base do núcleo de T é $((-3, -2, 1))$.

Resolução:
Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. As duas primeiras linhas de A são independentes enquanto que a terceira é um múltiplo da segunda, pelo que car(A)=2.

a) Falsa, pois T seria sobrejectiva se e só se car(A)=dim(P_2), i.e., car(A)=3.

b) Verdadeira. Como car(A)=2, 0 é valor próprio de A e logo a matriz A admite vectores próprios. Sendo (a, b, c) um vector próprio de A, então $p(t) = a + bt + ct^2$ é um vector próprio de T.

c) Verdadeira. Verificar se $T(t + t^2) = 3 + 6t + 3t^2$ é equivalente a verificar se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

d) Falsa, pois o vector $(-3, -2, 1)$ não pertence a P_2.

(*Observação: De facto* $\Big((-3, -2, 1)\Big)$ *é uma base para o núcleo de* A*, pelo que* $\Big(-3 - 2t + t^2\Big)$ *é uma base para o núcleo de* T.