Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica
$1^{\underline{o}}$ Semestre — 24 Out. 2006

Nome:______________________________________	
Número:__________________________	Curso:_________

Duração: 45 Minutos
Cotação das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1,5 v. Errada: -0,5v.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	Total esc. múlt.:
4.	5.	6.
Nota:		

---

1. Sejam A e B as matrizes seguintes: **[1.5]**

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual das seguintes matrizes é igual a BA^T?

☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$ ☒ $\begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

---

2. Seja A uma matriz de tipo $n \times n$ invertível. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.5]**

I. A matriz A não tem entradas nulas.
II. O sistema $AX = 0$ é possível e determinado.
III. A matriz A pode escrever-se como produto de matrizes elementares.
IV. A característica de A é menor do que n.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e II ☒ II e III ☐ II e III e IV ☐ I e III

---

3. Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Considere a seguinte lista de afirmações referentes à matriz E: **[1.5]**

I. $car\,(E) = 3$.

II. $(E^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

III. E é uma matriz elementar.

IV. Sendo B uma matriz 3×7, EB é a matriz que se obtém de B adicionando à primeira linha de B a terceira linha de B multiplicada por -3.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e III e IV ☐ I e III ☒ I e II e III e IV ☐ II e IV

---

4. Seja M uma matriz de ordem 4 tal que $M^4 = I_4$ e seja C uma matriz coluna de tipo 4×1.

Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

i) O sistema $MX = 0$ é possível e $\underline{\textit{determinado}}$

ii) $M^{-1} = \underline{M^3}$

iii) $car(M) \,\underline{=}\, car([M|C])$

iv) $X = \underline{M^3C}$ é solução do sistema $MX = C$ **[0.5]**

---

5. Escreva a matriz $A = [a_{ij}]$ de tipo 3×4 definida por **[1.5]**

$$a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para } j \leq i \\ (-1)^{(i+j)}(j-2)^2 & \text{para } j > i \end{cases}$$

Resposta: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$.

---

6. Para cada parâmetro real b considere o sistema de equações lineares cuja matriz aumentada é **[2.0]**

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & b^2 & b-2 \end{array}\right].$$

Faça a discussão dos sistemas em função de b e determine a solução geral em cada caso.

Resolução: Aplicando o métedo de eliminação de Gauss:

$$A_b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & b^2 & b-2 \end{array}\right] \underset{-4L_1+L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & b^2-4 & b+2 \end{array}\right].$$

Portanto para
• $b = 2$ o sistema é impossível e portanto o conjunto solução é $S = \emptyset$.
• $b = -2$ o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a 2. Escolhendo as incógnitas y e z para incógnitas livres, temos que o conjunto solução é:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = -1\} = \{(-1 + y - z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y, z \in \mathbb{R}\}.$$

• para $|b| \neq 2$, o sistema é possível e indeterminado, com grau de indeterminação igual a 1. Podemos escolher y para variável livre, e o conjunto solução é:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y + z = -1, \ (b^2-4)z = b+2\} =$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = -1 - \frac{1}{b-2} + y, \ z = \frac{1}{b-2}\} =$$

$$\{(1 - \frac{1}{b-2} + y, y, \frac{1}{b-2}) \in \mathbb{R}^3 : \ y \in \mathbb{R}\}.$$