Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. Ambiente, Eng. Biológica
1º Semestre — 14/11/ 2006

Nome:____
Número:____________________________ Curso:__________

Duração: 45 Minutos
Cotação das perguntas de escolha múltipla : Correcta: 1,0 Errada: -0,3v.

A preencher pelo docente:

Correctas	Erradas	Total esc. múlt.:	
4.	5.	6.	
Nota:			

---

1. Sejam A, B duas matrizes de ordem n tais que $\det(A-B)=0$. Diga qual das afirmações seguintes é verdadeira. **[1.0]**

☐ A matriz $A-B$ tem pelo menos uma linha nula.
☐ $\det(A)=\det(B)$.
☒ Existem pelo menos duas matrizes coluna distintas X_1 e X_2 tais que

$$AX_i = BX_i, i = 1, 2.$$

☐ O sistema $(A-B)X=0$ é possível e determinado.

---

2. Seja A uma matriz de tipo 4×4 tal que $\det A = \frac{1}{5}$. **[1.0]**
Considere a seguinte lista de afirmações:

I. A matriz A não tem linhas iguais.
II. O núcleo de A só tem um vector.
III. $\det(3A) = \frac{3}{5}$
IV. $\det(AA^T)^{-1} = 25$

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ II e IV ☐ I e III e IV ☒ I e II e IV

---

3. Considere a seguinte base ordenada de $\mathbb{R}^3$ **[1.0]**

$$B = ((1,1,-1),(1,1,0),(1,0,2)).$$

Qual dos vectores v_B abaixo é o vector das coordenadas de $v = (3,2,0)$ na base B?

☐ $v_B = (1,0,2)$ ☐ $v_B = (1,2,0)$

☒ $v_B = (2,0,1)$ ☐ $v_B = (0,2,1)$

---

4. Sejam $u = (1,3,-1)$ e $v = (-1,0,-2)$ vectores de $\mathbb{R}^3$. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I. O subespaço gerado por $\{u, v, (0,3,-3)\}$ tem dimensão 3.
II. Existe uma base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $\{u, v\} \subset B$.
III. O vector $(2,3,1)$ é uma combinação linear de u e v.
IV. O subespaço vectorial gerado por u e v é

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 3y\}.$$

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e II ☐ I e III ☒ II e III ☐ I e II e IV

---

5. Seja M uma matriz de ordem 3 tal que $\det(M^3) = 27$.
Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

i) $\det(2M)^{-1} = \underline{1/24}$ **[0.4]**
ii) $\det(MM^T) = \underline{9}$ **[0.4]**
iii) $\det(-M)^{-1} = \underline{-1/3}$ **[0.4]**
iv) A matriz M adj$M$ é a matriz $\underline{\det(M)I_3 = 3I_3}$ **[0.4]**

---

6. Seja A uma matriz de tipo 4×5 tal que dim $EC(A) = 3$. Complete de modo a obter afirmações verdadeiras:

i) dim Nuc $A^T = \underline{1 = n^o \ colunas\ de\ A^T\ -\ car(A) = 4 - 3}$ **[0.4]**
ii) As linhas de A são linearmente *dependentes* **[0.4]**
iii) O núcleo de A é um subespaço de $\underline{\mathbb{R}^5}$ **[0.4]**
iv) O sistema $AX = 0$ tem grau de indeterminação $\underline{5 - 3 = 2}$ **[0.4]**

---

7. Complete a matriz **[1.2]**

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & ... & 1 \\ 2 & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & ... & ... \end{bmatrix}.$$

de forma a que dim $EC(M) = 2$ e $(1, 1, 1, 1)$ pertença ao núcleo de M.

Resposta: por exemplo, $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \underline{0} & 1 \\ 2 & \underline{0} & \underline{4} & \underline{-6} \\ 0 & 1 & \underline{1} & \underline{-2} \end{bmatrix}$ ou $M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \underline{0} & 1 \\ 2 & \underline{-4} & \underline{0} & \underline{2} \\ 0 & 1 & \underline{-1} & \underline{0} \end{bmatrix}$.

---

8. Considere para cada par (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$ a matriz

$$M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ a & a^2 & b \\ 2a & 2a^2 & 2b \end{bmatrix}.$$

a) Determine a dimensão do núcleo de $M_{(a,b)}$, para cada par (a, b). **[1.0]**

b) Para $a = b = 0$ determine uma base do núcleo de $M_{(0,0)}$. **[0.6]**

Resolução:
Aplicando o método de eliminação de Gauss:

$$M_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ a & a^2 & b \\ 2a & 2a^2 & 2b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & a^2-2a & b-6a \\ 0 & 2a^2-4a & 2b-12a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & a^2-2a & b-6a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Tem-se dim(Nuc($M_{(a,b)}$))=n^o colunas de $M_{(a,b)}$ - car($M_{(a,b)}$).

Neste caso $\text{car}(M_{(a,b)}) = \begin{cases} 1, & se\ a^2 - 2a = 0\ e\ b = 6a \\ 2, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Portanto concluimos que $\dim \text{Nuc}(M_{(a,b)}) = \begin{cases} 2, & se\ (a,b) = (0,0)\ ou\ (a,b) = (2,12) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases}$.

b) Para $a = b = 0$ a matriz $M_{(a,b)}$ é $M_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo

$\text{Nuc}(M_{(0,0)}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 6z = 0\}$. Como podemos escolher as variáveis y e z como variáveis livres, temos que

$\text{Nuc}(M_{(0,0)}) = \{(-2y - 6z, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ y, z \in \mathbb{R}\}$.
Mas como, para todo y e z,

$$(-2y - 6z, y, z) = y(-2, 1, 0) + z(-6, 0, 1)$$

e $\dim \text{Nuc}(M_{(0,0)}) = 2$ concluimos que $\{(-2, 1, 0), (-6, 0, 1)\}$ é uma base do $\text{Nuc}(M_{(0,0)})$.