Álgebra Linear

Licenciaturas: Eng. de Materiais, Eng. Biológica, Eng. Ambiente, Eng. Química, Química

1º Semestre — 11 Dez. 2006 - v. II

Nome:____

Número:__________________________ Curso: __________

Duração: 1H:30M

Cotação das perguntas de escolha múltipla: Correcta: 1.0 v. Errada: -0,3v.

Instruções:

- **Desligue completamente o seu telemóvel.**
- Não é permitido usar calculadoras.
- Todas as perguntas devem ser respondidas neste enunciado.

A preencher pelo docente

Correctas	Erradas	Total esc. múlt.:	
8.	9.	10.	11.
12.a)b)	12.c)	13.1.	13.2.
Nota:			

---

1. Considere o espaço vectorial real $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas 2×2, munido das operações habituais, e a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I) $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ é um espaço vectorial de dimensão 4.

II) O conjunto $\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a + b = 1\}$ é um subespaço vectorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

III) O subespaço $\{M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : M = M^T\}$ tem dimensão 3.

IV) Existe uma base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ que inclui os vectores
$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$ e $M_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$.

A lista **completa** de afirmações correctas é

☐ I e II ☒ I e III ☐ II e III ☐ II e IV

`A afirmação I é obviamente verdadeira. A afirmação II é falsa porque p.ex. o vector nulo de` $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$`, i.e. a matriz nula, não pertence ao conjunto. A afirmação III é verdadeira, uma vez que se` $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ `é simétrica então` $c = d$ `e temos 3 variáveis livres. A afirmação IV é falsa porque` $M_2 = \sqrt{2}M_1$`, i.e.` M_1 `e` M_2 `são linearmente dependentes.`

---

2. Seja $P = \{(x, y, z, w, t) \in \mathbb{R}^5 : x + y = 1 \text{ e } 2z + w = 20\}$ e r a recta $(0, 0, 0, 0, 20) + \big\langle(1, -1, 0, 1, 0)\big\rangle$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira? **[1.0]**

☐ P é um plano.
☒ A recta r não está contida em P.
☐ Para definir r por um sistema de equações cartesianas são necessárias pelo menos 5 equações.
☐ A recta r é paralela a P.

P `não é um plano pois` $P \subset \mathbb{R}^5$ `e é definido por um sistema possível com duas equações.`

`Para ver que a recta não está contida no plano basta ver que as coordenadas do ponto` $(0, 0, 0, 0, 20)$ `não satisfazem as equações que definem` P`. A recta` r `não é paralela a` P `pois` $(1, -1, 0, 1, 0)$ `não é solução de` $x + y = 0$ `e` $2z + w = 0$`.`

---

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}$ e sejam $u = (3, 6)$, $v = (1, -1)$. **[1.0]**

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

☐ u e v são vectores próprios de A.
☒ u é vector próprio de A e v não é vector próprio de A.
☐ u não é vector próprio de A e v é vector próprio de A.
☐ Nem u nem v são vectores próprios de A.

`Note que` $A \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 30 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$ `e` $A \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ `para qualquer escalar` λ`.`

---

4. Seja A uma matriz real cujo polinómio característico é $p_A(x) = x^2(1-x)(2-x)$ e tal que a característica de A é 2. Considere a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I. A é uma matriz de tipo 4×4

II. A matriz A não é diagonalizável.
III. A matriz A é invertível.
IV. Zero é valor próprio de A.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ II e III ☐ II ☒ I e IV ☐ III e IV

`A afirmação I é verdadeira porque o grau do polinómio característico de` A `é 4. A afirmação II é falsa, porque as multiplicidades algébricas e geométricas de cada um dos valores próprios, i.e.` $\{0,1,2\}$`, são iguais. A afirmação III é falsa e a afirmação IV é verdadeira porque` $x = 0$ `é um dos valores próprios de` A`.`

---

5. Considere em $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno usual, o subespaço **[1.0]**

$$W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - w = 0\},$$

e a seguinte lista de afirmações:

I. $\dim W = \dim W^{\perp}$

II. O vector $(0,0,1,0)$ pertence a $W^{\perp}$.

III. O vector $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, 1, \sqrt{12})$ pertence a W.

IV. $\dim W^{\perp} = 1$.

A lista **completa** de afirmações correctas é:

☐ I e IV ☐ II e III ☐ I e II ☒ III e IV

`A afirmação I é falsa e a afirmação IV é verdadeira, porque dim`$(W) =$ `3 e dim`$(W^{\perp}) = 1$`. A afirmação II é falsa porque` $(0,0,1,0)$ `pertence a` W`. A afirmação III é verdadeira porque o vector verifica a equação que define` W`, i.e.` $\sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{12} = 0$`.`

---

6. Seja A uma matriz quadrada tal que $\{(1,0,1),(1,-1,1)\}$ é uma base do núcleo de A^T. **[1.0]**

Diga qual das seguintes afirmações é verdadeira:

☐ O espaço das linhas de A^T não é gerado por $(1,0,-1)$.
☒ O espaço das colunas de A é gerado pelo vector $(1,0,-1)$.
☐ A tem três valores próprios distintos.
☐ $\{(1,0,1)\}$ pode ser uma base do núcleo de A.

`Sabemos que em geral` $N(A^T)^\perp = EL(A^T) = EC(A)$. `Como o vector` $(1,0,-1)$ `é ortogonal aos vectores` $(1,0,1),(1,-1,1)$, `que formam uma base de` $N(A^T)$, `necessáriamente` $(1,0,-1)$ `gera` $EC(A)$.

---

7. Considere o sistema $Ax = b$ onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, e a seguinte lista de afirmações: **[1.0]**

I. Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector x^* tal que $\|b - Av\| \leq \|b - Ax^*\|$ para todo o $v \in \mathbb{R}^2$.

II. Se x^* é uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ então $(Ax^* - b)$ pertence ao núcleo de A^T.

III. O sistema $Ax = b$ tem uma única solução de mínimos quadrados.

IV. Uma solução de mínimos quadrados para $Ax = b$ é um vector $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $A^T v = b$.

A lista **completa** de afirmações correctas é

☐ I e IV ☒ II e III ☐ I e II ☐ III e IV

`A afirmação I é falsa devido ao teorema da melhor aproximação e definição de mínimos quadrados. A afirmação II é verdadeira porque a equação de quadrados mínimos associada a` $Ax = b$ `é` $A^T A x^* = A^T b$ `e portanto` $A^t(Ax^* - b) = 0$. `A afirmação III é verdadeira porque as colunas de` A `são vectores linearmente independentes. A afirmação IV é falsa por definição de solução de mínimos quadrados ou então note que` A^T `é do tipo` 2×4 `e` b `do tipo` 4×1 `pelo que não podemos formar o sistema` $A^T v = b$.

---

8. Considere $\mathbb{R}^2$ munido do produto interno $\langle x \, , \, y\rangle = x^T A \, y$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $x, y \in \mathbb{R}^2$ são vectores coluna. Complete de modo a obter afirmações verdadeiras relativamente a este produto interno:

i) $||(1,1)|| = \underline{\sqrt{3}}$.

ii) O coseno do ângulo entre $(1,1)$ e $(2,0)$ é $\underline{\sqrt{\frac{2}{3}}}$

iii) $\text{proj}_{(1,1)}\ (2,0) = \underline{\frac{4}{3}(1,1)}$.

iv) $B = ((1,0),(0,1))$ não é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^2$. **[0.4]**

v) Sendo $\mathbf{t}$ o vector $\underline{(1,-2)}$ $B = ((1,1),\mathbf{t})$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$. **[0.4]**

---

9. Complete, se possível, a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ \frac{1}{2} & ... & ... \end{bmatrix}$, de forma a que A seja uma matriz ortogonal. **[1.2]**

`Uma resposta:` $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$,

---

Justifique convenientemente todas as respostas às questões seguintes

---

10. Considere em $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno usual, os vectores $u = (2,3,2)$ e $v = (1,1,3)$. Sendo W um subespaço de $\mathbb{R}^3$ tal que $v \in W$ e $u - v \in W^\perp$, determine a distância de u a W. **[1.1]**

Resolução: Por definição de distância,

$$d(u, W) = ||\text{proj}_{W^\perp} u||.$$

Sabemos que

$$u = \text{proj}_W u + \text{proj}_{W^\perp} u \qquad (*)$$

mas como por hipótese temos a decomposição $u = v + (u - v)$, com $v \in W$ e $(u - v) \in W^\perp$ e dada a unicidade da decomposição em (*) concluimos que $\text{proj}_W u = v$ e $\text{proj}_{W^\perp} u = v - u$. Portanto,

$$d(v, W) = ||u - v|| = ||(1, 2, -1)|| = \sqrt{6}.$$

11. Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $(2, -2, 0, 1)$ e $(1, 1, 0, 3)$. Dê um exemplo, se for possível, de uma matriz A com 3 linhas tal que o complemento ortogonal do núcleo de A seja W e tal que o vector $(2, 1, 3)$ pertença ao espaço de colunas de A. **[1.0]**

Resolução: Sabemos que $N(A)^\perp = EL(A)$, pelo que as duas primeira linhas de A podem ser escolhidas como sendo os vectores $(2, -2, 0, 1)$ e $(1, 1, 0, 3)$, fazendo notar que na primeira coluna aparecem as primeiras duas coordenadas do vector $(2, 1, 3)$. Portanto devemos escolher a terceira coordenada de $(2, 1, 3)$ para a entrada $(3, 1)$ de A, i.e. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & ... & ... & ... \end{bmatrix}$, em que ainda teremos de determinar 3 entradas. Como $W = EL(A)$, a 3a linha tem de ser combinação linear das duas primeiras. Como temos a entrada $(3,1)$ igual a 3 que é igual à soma das entradas (1,1) e (2,1), podemos escolher, por exemplo, linha 1 + linha 2 = linha 3, i.e. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

12. Seja $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ uma matriz tal que o núcleo de $(A - 3I_3)$ é gerado pelos vectores $(1,-1,0)$ e $(2,0,0)$ e tal que $A\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}0 & -2 & -6\end{bmatrix}^T$

a) Escreva o polinómio característico de A. **[0.6]**

b) Diga, justificando, se A pode ser uma matriz simétrica. **[0.3]**

c) Diga, justificando, se A é diagonalizável. No caso de o ser determine uma matriz S tal que $S^{-1}AS$ seja diagonal. Indique ainda a matriz diagonal correspondente à matriz S que calculou. **[1.3]**

Resolução:

a) $p(\lambda) = -(\lambda-3)^2(\lambda+2)$, porque $A[0\ 1\ 3]^T = [0\ -2\ -6]^T$ significa que $\lambda = -2$ é um valor próprio associado ao vector $(0,1,3)$, e as outras condições implicam que $\lambda = 3$ é uma valor próprio em que $(1,-1,0)$ e $(2,0,0)$ são dois vectores próprios linearemente independentes (observe que $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$).

b) Não, porque se A é uma matriz simétrica, então vectores próprios associados a valores distintos são ortogonais.

c) A matriz A é diagonalizável porque as multiplicidades algébrica e geométrica de cada valor póprio coincidem. As colunas da matriz S são formadas pelos vectores próprios provenientes das bases dos espaços próprios: $S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e a matriz diagonal associada é $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

13. Diga, justificando se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:

1. Seja A uma matriz real de tipo $m \times n$ e b um vector não nulo que pertence ao núcleo de A^T. Então o sistema de equações lineares $Ax = b$ não tem solução. **[1.3]**

2. Se A é a matriz quadrada de ordem 5 cujas entradas são todas iguais a 1, **[1.2]**

$$\text{então } A \text{ é semelhante à matriz } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

1. Verdadeira. Sabemos que

$$N(A^T)^{\perp} = EL(A^T) = EC(A), \quad N(A^T) \cap EC(A) = \{0\}.$$

Logo, se $b \in N(A^T)$ e b$\neq 0$, $b \notin EC(A)$. Como um sistema $Ax = b$ é possível se e só se $b \in EC(A)$, concluimos que $Ax = b$ não tem solução.

2. Verdadeira. A característica de A é 1, pelo que dim $\mathrm{N}(A) = 4$, e portanto $\lambda = 0$ é um valor próprio de A cuja multiplicidade geométrica é igual a 4. Por outro lado (veja o problema 14 da lista 6), $\lambda = 5$ também é um valor próprio que tem que ter multiplicidade (algébrica) geométrica igual a 1, uma vez que A é do tipo 5×5. Portanto A é diagonalizável e existe uma matriz S tal que, $D = S^{-1}AS$ onde a diagonal de D são os valores próprios de A como indicado no enunciado e as colunas de S são formadas pelos vectores próprios de A provenientes do valores próprios respectivos.