GEOMETRIA ALGÉBRICA 2003-2004

Exercícios- Lista 2

1) Seja $I =< X^2 - Y^3, Y^2 - Z^3 >\subset K[X,Y,Z]$ e seja $\phi : K[X,Y,Z] \to K[T]$ o morfismo tal que $\phi(X) = T^9, \phi(Y) = T^6, \phi(Z) = T^4$.

a) Mostre que qualquer elemento de $K[X,Y,Z]/I$ tem um representante da forma $F_0 + F_1X + F_2Y + F_3XY$, onde $F_i \in K[Z]$.

b) Seja $F = F_0 + F_1X + F_2Y + F_3XY \in K[X,Y,Z]$ tal que $\phi(F) = 0$. Mostre que $F = 0$.

c) Mostre que $\mathrm{Ker}\phi = I$ e que I é um ideal primo.

d) Mostre que $W = V(I)$ é irredutivel e $I(V(I)) = I$.

e) Considere o morfismo $\overline{\phi} : K[X,Y,Z]/I \to K[T]$ induzido por ϕ. Determine a aplicação polinomial f correspondente a $\overline{\phi}$ e mostre que é bijectiva mas não é um isomorfismo.

2) Considere a cúbica C de $\mathbf{P}^2$ definida por $y^2z = x^3 + x^2z$.

a) Determine as curvas afins correspondentes a C na decomposição usual de $\mathbf{P}^2$ como união de três espaços afins.

b) Mostre que C é birracionalmente equivalente a $\mathbf{P}^1$.

3) Considere em A^4 com coordenadas (x,y,z,t) a subvariedade V tal que $I(V)$ é gerado por $XT - YZ$ e a função $f = \frac{X}{Y} \in K(V)$.

a) Determine o dominio de f

b) Diga, justificando, se V contem rectas ou planos de A^4.

c) Determine o fecho projectivo $\overline{V}$ de V em P^4 (por meio de $(x,y,z,t) \to (x:y:z:t:1)$ e determine se existirem dois hiperplanos H_1, H_2 de P^4 tais que $\overline{V} \cap H_1 \cap H_2$ seja uma variedade redutivel.

4) a) Determine, se existir uma subvariedade afim de A^n que seja isomorfa a

$$\{(x,y) \in A^2 : x \neq 0\}.$$

b) Mostre que $\{(x,y) \in A^2 : x \neq 0, y \neq 0\}$ não é uma variedade afim.

5) Considere o conjunto $GL(2,\mathbf{C})$ formado pelas matrizes quadradas invertiveis de ordem 2 com coeficientes complexos. Mostre que $GL(2,\mathbf{C})$ tem estrutura de variedade afim e diga qual a sua dimensão.

Exercício das folhas: 2.10.2