

## Cálculo equacional e sistemas de reescrita

1. Seja  $INT$  a especificação algébrica para o tipo  $int$  (inteiros) construída no exercício 1 da folha de exercícios *Especificações algébricas de tipos de dados abstractos*.
  - a) Mostre que
    - i)  $INT \vdash suc(suc(n)) = soma(suc(n), suc(zero))$
    - ii)  $INT \vdash multiplicação(soma(zero, zero), suc(zero)) = soma(zero, zero)$
    - iii)  $INT \vdash multiplicação(subtracção(x, pred(zero)), suc(zero)) = pred(soma(x, suc(suc(zero))))$
  - b) Encontre o sistema de reescrita induzido por  $INT$  e derive por reescrita as equações referidas em a).
2. a) Construa uma especificação algébrica  $NAT$  para o tipo  $nat$  (naturais) com as operações  $zero$ ,  $suc$ ,  $soma$ ,  $multiplicação$ ,  $max$ ,  $menorQ$  e  $eqnat$  (igualdade entre naturais). Nota: introduza também a especificação de tipos (auxiliares) que considere relevantes, com as operações que considere necessárias incluindo, em particular, a operação  $ifthenelse: bool\ nat\ nat \rightarrow nat$ .
  - b) Mostre que
    - i)  $NAT \vdash menorQ(suc(suc(zero)), suc(zero)) = menorQ(soma(suc(zero), zero), zero)$
    - ii)  $NAT \vdash eqnat(soma(x, x), multiplicação(x, suc(suc(zero)))) = true$
    - iii)  $NAT \vdash soma(zero, suc(zero)) = ifthenelse(eqnat(suc(zero), max(suc(zero), zero)), suc(zero), zero)$
  - c) Encontre o sistema de reescrita induzido por  $NAT$  e derive por reescrita as equações referidas em b).
3. Seja  $BOOL$  a especificação algébrica para o tipo  $bool$  (booleanos) construída no exercício 2 da folha de exercícios *Especificações algébricas de tipos de dados abstractos*.
  - a) Mostre que
    - i)  $BOOL \vdash and(not(false), and(true, true)) = not(not(true))$
    - ii)  $BOOL \vdash and(true, and(false, true)) = and(and(true, false), true)$
    - iii)  $BOOL \vdash and(true, ifthenelse(not(true), x, not(x))) = not(if(not(not(true)), x))$
  - b) Encontre o sistema de reescrita induzido por  $BOOL$  e derive por reescrita as equações referidas em a).
4. Seja  $PILHA$  a especificação algébrica para o tipo  $pilha$  de  $elem$  construída no exercício 3 da folha de exercícios *Especificações algébricas de tipos de dados abstractos*.

- a) Mostre que
- i)  $PILHA \vdash topo(retira(sobrepõe(x, p))) = topo(retira(sobrepõe(y, p)))$
  - ii)  $PILHA \vdash sobrepõe(x, retira(sobrepõe(y, p))) = sobrepõe(topo(sobrepõe(x, nova)), retira(sobrepõe(z, p)))$
  - iii)  $PILHA \vdash sobrepõe(y, retira(sobrepõe(z, p))) = retira(sobrepõe(egen(sobrepõe(x, sobrepõe(y, nova)), p))$
  - iv)  $PILHA \vdash sobrepõe(z, sobrepõe(y, nova)) = retira(alterna(sobrepõe(x, sobrepõe(y, nova)), sobrepõe(z, nova)))$
- b) Encontre o sistema de reescrita induzido por  $PILHA$  e derive por reescrita as equações referidas em a).

5. Seja  $FILA$  a especificação algébrica para o tipo *fila-de-espera* de *elem* construída no exercício 4 da folha de exercícios *Especificações algébricas de tipos de dados abstractos*.

- a) Mostre que
- i)  $FILA \vdash primeiro(entra(x, entra(y, r))) = primeiro(desiste(entra(x, entra(y, r))))$
  - ii)  $FILA \vdash sai(junta(r, entra(y, entra(x, inicial)))) = entra(y, sai(entra(x, r)))$
  - iii)  $FILA \vdash primeiro(entra(x, entra(y, inicial))) = primeiro(desiste(junta(entra(y, inicial), entra(x, inicial))))$
- b) Encontre o sistema de reescrita induzido por  $FILA$  e derive por reescrita as equações referidas em a).

6. Considere a especificação algébrica  $GRP = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$  tal que

- Assinatura
  - $E = \{grp\}$
  - $e : \rightarrow grp$
  - $i : grp \rightarrow grp$
  - $o : grp\ grp \rightarrow grp$
- $X_{grp} = \{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \dots\}$
- Axiomas
  - $o(e, x) = x$
  - $o(i(x), x) = e$
  - $o(o(x, y), z) = o(x, o(y, z))$

- a) Mostre que
- i)  $GRP \vdash o(x, i(x)) = e$
  - ii)  $GRP \vdash o(x, e) = x$
  - iii)  $GRP \vdash i(i(x)) = x$

iv)  $GRP \vdash i(o(x, y)) = o(i(y), i(x))$

Na derivação de uma equação pode, se achar conveniente, utilizar equações que tenha derivado em alíneas anteriores.

- b) Encontre o sistema de reescrita induzido por  $GRP$ . Verifique se é possível derivar por reescrita as equações referidas em a).

**Nota:** Pode acontecer que não consiga derivar algumas das equações propostas nos exercícios anteriores pelo facto de, por exemplo, ter considerado na especificação dos inteiros as equações  $soma(zero, x) = x$  e  $soma(suc(x), y) = suc(soma(x, y))$  (o que não está incorrecto) em vez de  $soma(x, zero) = x$  e  $soma(x, suc(y)) = suc(soma(x, y))$ . Nesse caso, resolva o exercício com a especificação que inclua estas duas últimas equações em vez das primeiras.