Álgebras sobre assinaturas e modelos de especificações algébricas (I)

1. Considere a especificação algébrica $nat = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{nat\}$
     $z :\to nat$
     $s : nat \to nat$
     $som : nat\ nat \to nat$
     $mult : nat\ nat \to nat$
   - $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $som(n, z) = n$
     - $som(n, s(m)) = s(som(n, m))$
     - $mult(n, z) = z$
     - $mult(n, s(m)) = som(n, mult(n, m))$

   (a) Verifique se é modelo de nat a álgebra $A = \langle |A|, \_A \rangle$ tal que

   $|A|_{nat} = \{0\}^*$
   $\underline{z}_A = \epsilon$
   $\underline{s}_A = \lambda\omega.\langle 0, a_1, \ldots, a_n \rangle$ (sendo $\omega = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$)
   $\underline{som}_A = \lambda\omega_1\omega_2.\omega_1\omega_2$
   $\underline{mult}_A = \lambda\omega_1\omega_2.\epsilon.$

   (b) Verifique se é modelo de nat a álgebra $B = \langle |B|, \_B \rangle$ tal que

   $|B|_{nat} = \{0, 1\}$
   $\underline{z}_B = 0$
   $\underline{s}_B = \lambda x.1$
   $\underline{som}_B = \lambda a_1 a_2.max(a_1, a_2)$
   $\underline{mult}_B = \lambda a_1 a_2.a_1 \times a_2.$

   (c) Verifique se é modelo de nat a álgebra $C = \langle |C|, \_C \rangle$ tal que

   $|C|_{nat} = \mathbb{N}_0$
   $\underline{z}_C = 0$
   $\underline{s}_C = \lambda x.x + 1$
   $\underline{som}_C = \lambda a_1 a_2.a_1 + a_2$
   $\underline{mult}_C = \lambda a_1 a_2.a_1 \times a_2.$

   (d) Existe algum homomorfismo $h : B \to C$?

   (e) Verifique se as álgebras B e C anteriores são:
   (i) álgebras geradas por Σ;
   (ii) álgebras típicas para $\emptyset$ na classe dos modelos de nat;
   (iii) iniciais na categoria dos modelos de nat.

2. Considere a especificação algébrica $pilhanat = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{nat, pilha\}$
     $z :\rightarrow nat$
     $nova :\rightarrow pilha$
     $s : nat \rightarrow nat$
     $sb : nat\ pilha \rightarrow pilha$
     $rt : pilha \rightarrow pilha$
   - $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$ e $X_{pilha} = \{p, p_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $rt(nova) = nova$
     - $rt(sb(n, p)) = p$

   (a) Verifique se é modelo de *pilhanat* a álgebra $A = \langle |A|, \_{A} \rangle$ tal que

   $|A|_{nat} = I\!N_0$ e $|A|_{pilha} = I\!N_0^*$
   $\underline{z}_A = 0$
   $\underline{nova}_A = \langle \rangle$
   $\underline{s}_A = \lambda x.x + 1$
   $\underline{sb}_A = \lambda x\omega.\langle x, a_1, \ldots, a_n \rangle$ (sendo $\omega = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$)
   $\underline{rt}_A = \lambda \omega.(\omega$ se $\omega = \langle \rangle$ e $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ se $\omega = \langle a, a_1, \ldots, a_n \rangle)$.

   (b) Verifique se é modelo de *pilhanat* a álgebra $B = \langle |B|, \_{B} \rangle$ tal que

   $|B|_{nat} = I\!N_0$ e $|B|_{pilha} = I\!N_0$
   $\underline{z}_B = 0$
   $\underline{nova}_B = 0$
   $\underline{s}_B = \lambda x.x + 1$
   $\underline{sb}_B = \lambda x.x + 1$
   $\underline{rt}_A = \lambda x.(0$ se $x = 0$ e $x - 1$ se $x > 0)$.

   (c) Existe algum homomorfismo $h : B \rightarrow A$?

   (d) Verifique se as álgebras A e B anteriores são:
   (i) álgebras geradas por Σ;
   (ii) álgebras típicas para $\emptyset$ na classe dos modelos de *pilhanat*;
   (iii) iniciais na categoria dos modelos de *pilhanat*.

3. Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{nat, bool\}$
     $t :\to bool$
     $f :\to bool$
     $z :\to nat$
     $s : nat \to nat$
     $add : natnat \to nat$
     $dbl : nat \to nat$
     $sqr : nat \to nat$
     $even : nat \to bool$

   - $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$ e $X_{bool} = \{b, b_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $add(z, n) = n$
     - $add(s(n), m) = s(add(n, m))$
     - $dbl(n) = add(n, n)$
     - $sqr(z) = z$
     - $sqr(s(n)) = s(add(sqr(n), dbl(n)))$
     - $even(dbl(n)) = t$
     - $even(s(dbl(n))) = f$

   (a) Construa um modelo $A = \langle |A|, \_A \rangle$ de *spec* tal que

   $|A|_{nat} = \{0, 1\}$ e $|A|_{bool} = \{0, 1\}$
   $\underline{z}_A = 0$
   $\underline{s}_A = \lambda x.1 - x$
   t_A e f_A são distintos.

   (b) Construa um modelo $B = \langle |B|, \_B \rangle$ de *spec* tal que

   $|B|_{nat} = I\!N_0$ e $|B|_{bool} = \{\text{true}, \text{false}\}$
   $\underline{z}_B = 0$
   $\underline{s}_B = \lambda x.x + 1$
   t_B e f_B são distintos.

   (c) Verifique se as álgebras A e B anteriores são:
   (i) álgebras geradas por Σ;
   (ii) álgebras típicas para $\emptyset$ na classe dos modelos de *spec*;
   (iii) iniciais na categoria dos modelos de *spec*.

4. Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

- $E = \{nat, bit, bin\}$
  $0 :\rightarrow bit$
  $1 :\rightarrow bit$
  $z :\rightarrow nat$
  $s : nat \rightarrow nat$
  $dbl : nat \rightarrow nat$
  $2up : nat \rightarrow nat$
  $+ : natnat \rightarrow nat$
  $null :\rightarrow bin$
  $app : bin\ bit \rightarrow bin$
  $cod : bin \rightarrow nat$
- $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$, $X_{bit} = \{b, b_1, \ldots\}$ e $X_{bin} = \{l, l_1, \ldots\}$
- Axiomas
  - $+(n, z) = n$
  - $+(n, s(m)) = s(+(n, m))$
  - $dbl(n) = +(n, n)$
  - $2up(z) = s(z)$
  - $2up(s(n)) = dbl(2up(n))$
  - $cod(null) = z$
  - $cod(app(l, 0)) = dbl(cod(l))$
  - $cod(app(l, 1)) = s(dbl(cod(l)))$

(a) Construa um modelo $A = \langle |A|, \_{A} \rangle$ de *spec* tal que

$|A|_{nat} = \mathbb{N}_0$, $|A|_{bit} = \{0, 1\}$ e $|A|_{bin} = \{0, 1\}^*$
$\underline{z}_A = 0$
$\underline{s}_A = \lambda x.x + 1$
$\underline{+}_A = \lambda xy.x + y$
$0_A = 0$
$1_A = 1$
$\underline{app}_A = \lambda \omega x. \langle a_1, \ldots, a_n, x \rangle$ (sendo $\omega = \langle a, a_1, \ldots, a_n \rangle$).

(b) Verifique se a álgebra A anterior é:
(i) álgebra gerada por Σ;
(ii) álgebra típica para $\emptyset$ na classe dos modelos de *spec*;
(iii) inicial na categoria dos modelos de *spec*.

5. Seja $\langle \Sigma, X \rangle$ uma assinatura com variáveis.

   (a) Seja A uma álgebra sobre Σ. Mostre que para todo o termo fechado t se tem que $[\![t]\!]^{A\rho} = [\![t]\!]^{A\rho'}$ quaisquer que sejam as atribuições $\rho, \rho' : X \to A$.

   (b) Sendo $AT(\Sigma, X)$ a álgebra dos termos, mostre que para todo o termo fechado t se tem que
   $$[\![t]\!]^{AT(\Sigma,X)} = t.$$
   (note que, tendo em conta a alínea anterior, para simplificar a notação se omitiu em $[\![t]\!]^{AT(\Sigma,X)}$ a referência à atribuição)

6. Seja $\langle \Sigma, X \rangle$ uma assinatura com variáveis com $\Sigma = \langle E, F \rangle$.

   (a) Para cada álgebra A sobre Σ, mostre que a família $h = \{h_e\}_{e \in E}$, onde para cada $e \in E$
   $$h_e : |\, AT(\Sigma)\,|_e \to |\, A\,|_e$$
   é a função tal que
   $$h_e(t) = [\![t]\!]^A$$
   para cada $t \in |\, AT(\Sigma)\,|_e$, constitui um homomorfismo $h : AT(\Sigma) \to A$.

   (b) Mostre que o homomorfismo h definido na alínea anterior é o único homomorfismo de $AT(\Sigma)$ para A.

7. Sejam $\mathit{spec} = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ uma especificação algébrica, A e A' álgebras sobre Σ e $h : A \to A'$ um homomorfismo.

   (a) Mostre que sendo $t_1, t_2 \in T(\Sigma)_e$, se $A \Vdash t_1 = t_2$ então $A' \Vdash t_1 = t_2$.

   (b) Mostre que sendo $t_1, t_2 \in T(\Sigma, X)_e$, se $A \Vdash t_1 = t_2$ então $A' \Vdash t_1 = t_2$ desde que h seja um homomorfismo sobrejectivo.