Álgebras sobre assinaturas e modelos de especificações algébricas (II)

Noções gerais sobre implementações apropriadas

1. Indique três modos distintos de mostrar que uma álgebra sobre Σ é uma implementação apropriada de uma especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$.

2. Seja $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ uma especificação algébrica onde $\Sigma = \langle E, F \rangle$. Mostre que se A e A' são duas implementações apropriadas de *spec* então

$$A \Vdash t_1 = t_2 \text{ sse } A' \Vdash t_1 = t_2$$

quaisquer que sejam $t_1, t_2 \in T(\Sigma, X)_e$, $e \in E$.

3. Seja $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ uma especificação algébrica onde $\Sigma = \langle E, F \rangle$. Seja A uma implementação apropriada de *spec*.

   (a) Diga, justificando adequadamente, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação:

   “ Quaisquer que sejam $t_1, t_2 \in T(\Sigma, X)_e$ e $e \in E$,
   $\Gamma \vdash_{CEq} t_1 = t_2$ sse $A \Vdash t_1 = t_2$.”

   (b) Alguma das implicações na afirmação da alínea a) é verdadeira?

   (c) É possível, de modo não trivial, alterar as condições da afirmação da alínea a) por forma a que resulte verdadeira?

4. Seja $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ uma especificação algébrica onde $\Sigma = \langle E, F \rangle$. Seja $\approx_\Gamma^X = \{\approx_{\Gamma_e}^X\}_{e \in E}$ a congruência em $AT(\Sigma, X)$ tal que $t_1 \approx_{\Gamma_e}^X t_2$ se $\Gamma \vdash_{CEq} t_1 = t_2$.

   (a) Mostre que $AT(\Sigma, X)/{\approx_\Gamma}$ é típica para X em $Mod(\Sigma, X, \Gamma)$.

   (b) $AT(\Sigma, X)/{\approx_\Gamma}$ é uma implementação apropriada de *spec*?

Construção de implementações apropriadas

1. Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{etc\}$
     $\alpha :\to etc$
     $\beta :\to etc$
     $\gamma :\to etc$
     $\delta :\to etc$
     $\epsilon : etc \to etc$
   - $X_{etc} = \{x, x_1, \ldots\}$
   - Axiomas

- $\alpha = \beta$
- $\gamma = \beta$
- $\epsilon(x) = \delta$

(a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$:

i. começando por caracterizar rigorosamente as classes de equivalência de $\approx_\Gamma$;

ii. apresentando primeiro uma proposta de $AT(\Sigma)/\Gamma$ e provando depois que é modelo e que, para cada modelo A de *spec*, $h : AT(\Sigma)/\Gamma \to A$, com $h_{etc} :\mid AT(\Sigma)/\Gamma \mid_{etc} \to A$ tal que $h([t]) = [\![t]\!]^A$, é o único homomorfismo da álgebra $AT(\Sigma)/\Gamma$ construída para A.

(b) Construa uma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *etc* seja $\{0, 1\}$. Mostre que é de facto uma implementação apropriada.

(c) Existe alguma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *etc* seja $\{0, 1, 2\}$?

(d) Existe alguma implementação apropriada da especificação que satisfaça a equação $\alpha = \delta$?

2. Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

- $E = \{xpto\}$
  $a :\to xpto$
  $b : xpto \to xpto$
  $c : xpto\ xpto \to xpto$
- $X_{xpto} = \{x, x_1, \ldots\}$
- Axiomas
  - $c(a, x) = a$
  - $c(x, a) = a$
  - $c(b(x_1), b(x_2)) = b(b(c(x_1, x_2))$

(a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$:

i. começando por caracterizar rigorosamente as classes de equivalência de $\approx_\Gamma$;

ii. apresentando primeiro uma proposta de $AT(\Sigma)/\Gamma$ e provando depois que é modelo e que, para cada modelo A de *spec*, $h : AT(\Sigma)/\Gamma \to A$, com $h_{xpto} :\mid AT(\Sigma)/\Gamma \mid_{etc} \to A$ tal que $h([t]) = [\![t]\!]^A$, é o único homomorfismo da álgebra $AT(\Sigma)/\Gamma$ construída para A.

(b) Construa uma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *xpto* seja $\mathbb{N}_0$. Mostre que é de facto uma implementação apropriada.

(c) Existe alguma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *xpto* seja $\{0, 1\}$?

(d) Existe alguma implementação apropriada da especificação que satisfaça a equação $c(b(x_1), b(x_2)) = b(c(b(a), b(a)))$?

3. Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{etc\}$
     $\alpha :\rightarrow etc$
     $\theta\ etc : etc \rightarrow etc$
   - $X_{etc} = \{x, x_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $\theta(x, \alpha) = \alpha$
     - $\theta(\theta(x_1, x_2), x_3) = \theta(x_1, \theta(x_2, x_3))$

   (a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

   (b) Mostre que $AT(\Sigma)/\Gamma \Vdash \theta(x_1, x_2) = x_2$.

   (c) Todos os modelos da especificação satisfazem $\theta(x_1, x_2) = x_2$? Apresente uma prova da afirmação, caso a considere verdadeira, e um contra-exemplo caso contrário.

4. Considere a especificação algébrica $bool = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{bool\}$
     $\texttt{t} :\rightarrow bool$
     $\texttt{f} :\rightarrow bool$
     $not : bool \rightarrow bool$
     $and : bool\ bool \rightarrow bool$
   - $X_{bool} = \{b, b_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $not(\texttt{f}) = \texttt{t}$
     - $not(\texttt{t}) = \texttt{f}$
     - $and(b, \texttt{t}) = b$
     - $and(b, \texttt{f}) = \texttt{f}$

   (a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

   (b) Mostre que $AT(\Sigma)/\Gamma \Vdash not(not(b)) = b$.

   (c) Será que todos os modelos da especificação satisfazem $not(not(b)) = b$? Apresente uma prova da afirmação, caso a considere verdadeira, e um contra-exemplo caso contrário.

   (d) Mostre que qualquer implementação apropriada da especificação satisfaz $not(not(b)) = b$.

5. Considere a especificação algébrica $nat = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{nat\}$
     $z :\to nat$
     $s : nat \to nat$
     $som : nat\ nat \to nat$
     $mult : nat\ nat \to nat$
   - $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $som(n, z) = n$
     - $som(n, s(m)) = s(som(n, m))$
     - $mult(n, z) = z$
     - $mult(n, s(m)) = som(mult(n, m), n)$

   (a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

   (b) Mostre que $AT(\Sigma)/\Gamma \Vdash som(n, m) = som(m, n)$.

   (c) Será que todos os modelos da especificação satisfazem $som(n, m) = som(m, n)$? Apresente uma prova da afirmação, caso a considere verdadeira, e um contra-exemplo caso contrário.

   (d) Será que $\Gamma \vdash_{CEq} som(n, m) = som(m, n)$? Justifique.

   (e) Mostre que qualquer implementação apropriada da especificação satisfaz $som(n, m) = som(m, n)$.

6. Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

   - $E = \{nat, bool\}$
     $\mathtt{t} :\to bool$
     $\mathtt{f} :\to bool$
     $z :\to nat$
     $s : nat \to nat$
     $add : natnat \to nat$
     $dbl : nat \to nat$
     $sqr : nat \to nat$
     $even : nat \to bool$
   - $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$ e $X_{bool} = \{b, b_1, \ldots\}$
   - Axiomas
     - $add(z, n) = n$
     - $add(s(n), m) = s(add(n, m))$
     - $dbl(n) = add(n, n)$
     - $sqr(z) = z$
     - $sqr(s(n)) = s(add(sqr(n), dbl(n)))$

- $even(dbl(n)) = \mathtt{t}$
- $even(s(dbl(n))) = \mathtt{f}$

(a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

(b) Construa uma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *nat* seja $I\!N_0$ e o domínio de *bool* seja $\{true, false\}$. Mostre que é de facto uma implementação apropriada.

7. Considere a especificação algébrica *spec* $= \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

- $E = \{xpto, etc\}$
  $\alpha :\rightarrow etc$
  $\beta :\rightarrow etc$
  $a :\rightarrow xpto$
  $b : xpto \rightarrow xpto$
  $c : etc\ xpto \rightarrow xpto$

- $X_{xpto} = \{x, x_1, \ldots\}$ e $X_{etc} = \{k, k_1, \ldots\}$
- Axiomas
  - $b(b(b(x))) = x$
  - $c(\alpha, x) = b(x)$
  - $c(\beta, x) = b(b(x))$

(a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

(b) Construa uma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *xpto* seja $\{0, 1, 2\}$ e o domínio de *etc* seja $\{\mathtt{t}, \mathtt{f}\}$. Mostre que é de facto uma implementação apropriada.

(c) Existe alguma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *xpto* seja $\{0, 1\}$? Justifique.

8. Considere a especificação algébrica *pilhanat* $= \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

- $E = \{nat, pilha\}$
  $z :\rightarrow nat$
  $nova :\rightarrow pilha$
  $s : nat \rightarrow nat$
  $sb : nat\ pilha \rightarrow pilha$
  $tp : pilha \rightarrow nat$
  $rt : pilha \rightarrow pilha$
- $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \ldots\}$ e $X_{pilha} = \{p, p_1, \ldots\}$
- Axiomas
  - $tp(nova) = z$

- $tp(sb(n,p)) = n$
- $rt(nova) = nova$
- $rt(sb(n,p)) = p$

(a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

(b) Construa uma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *nat* seja $I\!N_0$ e o domínio de *pilha* seja $I\!N_0^*$. Mostre que é de facto uma implementação apropriada.

9. Considere a especificação algébrica *filabool* $= \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde

- $E = \{bool, fila\}$
  $\mathtt{t} :\to bool$
  $\mathtt{f} :\to bool$
  $new :\to fila$
  $in : bool\ fila \to fila$
  $out : fila \to bool$
  $empty : fila \to bool$
- $X_{bool} = \{b, b_1, \ldots\}$ e $X_{fila} = \{s, s_1, \ldots\}$
- Axiomas
  - $empty(new) = \mathtt{t}$
  - $empty(in(b,s)) = \mathtt{f}$
  - $out(new) = new$
  - $out(in(b, new)) = new$
  - $out(in(b_1, in(b_2, s))) = in(b_1, out(in(b_2, s)))$

(a) Construa a álgebra quociente gerada pela especificação, $AT(\Sigma)/\Gamma$. Justifique rigorosamente a construção apresentada.

(b) Construa uma implementação apropriada da especificação na qual o domínio de *bool* seja $\{0,1\}$ e o domínio de *fila* seja $\{0,1\}^*$. Mostre que é de facto uma implementação apropriada.