

Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Lic. em Matemática Aplicada e Computação
Lic. em Ciências Informáticas

Fundamentos Algébricos da Engenharia da Programação

Exame 1

21 de Junho de 2004

Duração: 3h

Cotação : 15 valores

Grupo 1 (1.5+1.5+1.5+1.5+1.5)

Considere a especificação algébrica $circlistnat = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde $\Sigma = \langle E, F \rangle$ e

– $E = \{nat, clst\}$

– os símbolos de operação em F são

$z : \rightarrow nat$	$s : nat \rightarrow nat$
$new : \rightarrow clst$	$in : clst\ nat \rightarrow clst$
$del : clst \rightarrow clst$	$val : clst \rightarrow nat$
$right : clst \rightarrow clst$	$join : clst\ clst \rightarrow clst$

– $X_{nat} = \{n, m, n_1, m_1, \dots\}$ $X_{clst} = \{r, r_1, \dots\}$

– as equações em Γ são

$del(new) = new$	$val(new) = z$
$del(in(r, n)) = s$	$val(in(r, n)) = n$
$right(new) = new$	$join(r, new) = r$
$right(in(new, n)) =$ $in(new, n)$	$join(r_1, in(r_2, n)) =$ $in(join(r_1, r_2), n)$
$right(in(in(r, m), n)) =$ $in(right(in(r, n)), m)$	

1. A partir de $circlistnat$ efectue uma derivação no cálculo equacional de $val(right(in(right(in(in(s, m_1), m_2)), m_3))) = m_1$
2. Derive no sistema de reescrita induzido por $circlistnat$ a equação
$$del(right(join(in(in(new, m_1), m_2), in(new, m_3)))) =$$
$$in(in(new, m_3), val(in(s, m_1)))$$
3. Estenda $circlistnat$ com as operações $min : clst \rightarrow nat$, que calcula o menor natural que ocorre na lista, e $repl : clst\ nat \rightarrow clst$, que substitui na lista cada ocorrência do natural dado pelo seu sucessor. Pode introduzir os géneros e operações auxiliares que considere convenientes.
4. Demonstre que o sistema de reescrita induzido por $circlistnat$ é terminante.
5. Seja $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ um especificação algébrica. Enuncie e demonstre a correção do sistema $R(\Gamma)$ relativamente ao cálculo equacional.

Grupo 2

(2.5+1.0+1.0)

Considere a especificação algébrica $spec = \langle \Sigma, X, \Gamma \rangle$ onde $\Sigma = \langle E, F \rangle$ e

- $E = \{e\}$
- os símbolos de operação em F são
 $\alpha, \beta : \rightarrow e \quad \gamma, \theta : e \rightarrow e \quad \delta : e e \rightarrow e$
- $X_e = \{x, x_1, \dots\}$
- as equações em Γ são

$\gamma(\beta) = \beta$	$\gamma(\gamma(x)) = x$
$\delta(x, \alpha) = \alpha$	$\delta(x, \beta) = x$
$\delta(x, \gamma(\alpha)) = x$	$\delta(\gamma(x), x) = \theta(x)$

1. Construa um modelo inicial de $spec$ e demonstre que é de facto um modelo inicial.
2. Assuma que o modelo construído em 1. satisfaz a equação $\theta(\theta(x)) = \theta(x)$. Seja A um outro modelo de $spec$. Que pode concluir sobre a satisfação de $\theta(\theta(x)) = \theta(x)$ por A ? E que pode concluir sobre a satisfação de $\theta(\theta(\alpha)) = \theta(\alpha)$ por A ? Justifique devidamente as suas respostas.
3. Mostre que o sistema de reescrita induzido pela especificação não é confluente.

Grupo 3

(1.5+1.5)

1. Use uma construção categorial apropriada para construir a composição paralela dos processos

$$P_1 = \langle \{x, y\}, \{\epsilon, y, yx, yy\} \rangle \text{ e } P_2 = \langle \{z, w\}, \{\epsilon, z, zw, zww\} \rangle$$

com sincronização das acções x e z .

2. Numa categoria \mathcal{C} sejam (C, i) e (D, j) igualadores de $f, g : A \rightarrow B$ e E isomorfo a C . Mostre que: (i) C e D são isomorfos; (ii) existe um igualador de f e g cujo objecto é E .