Noções elementares sobre conjuntos

Conjunto, elemento de um conjunto

Factos

Um conjunto pode ser visto, intuitivamente, como uma colecção de objectos. Cada um destes objectos é um elemento do conjunto.

Usa-se $a \in A$, que se lê "a pertence a A", para afirmar que a é um elemento do conjunto A. Usa-se $a \notin A$, que se lê "a não pertence a A", para afirmar que a não é um elemento do conjunto A.

Conjuntos com um só elemento são designados conjuntos singulares. Considera-se também a existência do conjunto vazio, o conjunto sem qualquer elemento, que pode representar-se por $\emptyset$ ou $\{\}$.

Exemplos

1. $\{1, 2, 3\}$ designa o conjunto que tem 1, 2 e 3 como únicos elementos.

   Este conjunto pode também ser designado por $\{1, 3, 2\}$, por $\{2, 1, 3\}$, por $\{2, 3, 1\}$, por $\{3, 1, 2\}$ ou por $\{3, 2, 1\}$.

   O mesmo conjunto pode ainda ser definido usando uma condição, como por exemplo,

   $$\{x : x \text{ é um número inteiro positivo e } x \text{ é menor que } 4\}$$

   que se lê "o conjunto dos x tais que x é um número inteiro positivo e x é menor que 4". A condição 'x é um número inteiro positivo e x é menor que 4"identifica os elementos do conjunto: são todos os objectos que verificam a condição.

   Naturalmente,

   $$\{x : x = 1 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 3\}$$

   e

   $$\{y : y \text{ é um número inteiro e } y \geq 1 \text{ e } y \leq 3\}$$

   definem também o conjunto em causa.

   As afirmações $2 \in \{1, 2, 3\}$ e $4 \notin \{1, 2, 3\}$ são verdadeiras.

   As afirmações $5 \in \{1, 2, 3\}$, $\frac{3}{2} \in \{1, 2, 3\}$ e $1 \notin \{1, 2, 3\}$ são falsas.

2. A afirmação $\frac{3}{2} \in \{y : y \text{ é um número racional e } y \geq 1 \text{ e } y \leq 3\}$ é verdadeira.

   A afirmação $\sqrt{2} \in \{y : y \text{ é um número racional e } y \geq 1 \text{ e } y \leq 3\}$ é falsa.

3. $\{1,2,3,\{1,2\}\}$ designa o conjunto que tem 1, 2, 3 e $\{1,2\}$ como únicos elementos.

   As afirmações $1 \in \{1,2,3,\{1,2\}\}$ e $\{1,2\} \in \{1,2,3,\{1,2\}\}$ são verdadeiras.

   A afirmações $\{1\} \in \{1,2,3,\{1,2\}\}$ e $\{1,2,3\} \in \{1,2,3,\{1,2\}\}$ são falsas.

4. O conjunto

$$\{x : x \text{ é capital de um país da União Europeia}\}$$

   é o conjunto cujos elementos são as capitais dos países que constituem a União Europeia. Para simplificar, assuma-se que C representa este conjunto.

   A afirmação Lisboa $\in C$ é verdadeira. A afirmação Milão $\in C$ é falsa.

   Considere-se agora o conjunto

$$\{x : x \in C \text{ e } x \text{ situa-se na Península Ibérica e } x \text{ é uma cidade litoral}\}.$$

   Lisboa é único elemento deste conjunto, o qual é assim um conjunto singular.

   Considere-se ainda o conjunto

$$\{x : x \in C \text{ e } x \text{ situa-se no Hemisfério Sul}\}.$$

   A condição "$x \in C$ e x situa-se no Hemisfério Sul"não é verificada por nenhum objecto, pelo que este é um conjunto sem qualquer elemento. É assim conjunto vazio.

Exercícios

1. Qual das seguintes afirmações é correcta?

   A. $r \notin \{p, q, \{p, r, s\}\}$.

   B. $\{p, q\} \in \{p, q, \{p, r, s\}\}$.

   C. O conjunto $\{p, q, \{p, r, s\}\}$ tem 4 elementos.

   D. $p \in \{s, \{p, r\}, \{r, s\}\}$

2. Qual das seguintes afirmações é correcta?

   A. $r \in \{s, \{p, r\}, \{r, s\}\}$.

   B. O conjunto $\{s, \{p, r\}, \{r, s\}\}$ tem 4 elementos.

   C. Existe um elemento de $\{s, \{p, r\}, \{r, s\}\}$ que pertence a um outro elemento de $\{s, \{p, r\}, \{r, s\}\}$.

   D. $\{p, r, s\} \in \{s, \{p, r\}, \{r, s\}\}$

3. Qual das seguintes afirmações é correcta?

   A. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

   B. Os conjuntos $\{\emptyset\}$ e $\{\{\emptyset\}\}$ têm o mesmo número de elementos.

   C. O conjunto $\{\emptyset\}$ tem o mesmo número de elementos que o conjunto vazio.

   D. $\emptyset \notin \{\emptyset\}$

4. Quantos elementos tem o conjunto $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$?

   A. 1

   B. 2

   C. 3

   D. 4

Subconjuntos de um conjunto

Factos

Diz-se que o conjunto A está contido no conjunto B, ou que A é subconjunto de B, sempre que todos os elemento de A sejam também elementos de B.

Usa-se $A \subset B$ para afirmar que o conjunto A está contido no conjunto B e $A \not\subset B$ para afirmar que o conjunto A não está contido no conjunto B.

Sempre que A seja subconjunto de B, pode também dizer-se que B contém A, usando-se neste caso $B \supset A$. Naturalmente, $B \not\supset A$ representa a negação desta afirmação.

Pode acontecer que $A \subset B$ e $B \subset A$, o que significa que A e B têm exactamente os mesmos elementos. Neste caso $A = B$ isto é, os conjuntos A e B são iguais.

Note-se que dado um qualquer conjunto A, $\emptyset \subset A$ e $A \subset A$.

Exemplos

1. As afirmações

   $$\emptyset \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{1\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{2\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{3\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{1,2\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{2,3\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{1,3\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{1,2,3\} \subset \{1,2,3\}$$

   são verdadeiras.

   As afirmações

   $$\{\emptyset\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{0\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\{0,1\} \subset \{1,2,3\}$$

   $$\emptyset \supset \{1,2,3\}$$

   $$\{1\} \supset \{1,2,3\}$$

   $$\{1,2\} \supset \{1,2,3\}$$

são falsas.

2. As afirmações

$$\emptyset \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$$

$$\{1,2\} \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$$

$$\{2,3\} \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$$

$$\{1,2,3\} \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$$

$$\{\{1,2\}\} \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$$

$$\{1,2,\{1,2\}\} \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$$

são verdadeiras.

A afirmação $\{\{2,3\}\} \subset \{1,2,3,\{1,2\}\}$ é falsa.

Exercícios

1. Qual das seguintes afirmações é correcta?

   A. $\{p,r\} \subset \{p,q,\{p,r,s\}\}$.
   B. $\{p,q,r,s\} \subset \{p,q,\{p,r,s\}\}$.
   C. $\{p,q,r\} \not\subset \{p,q,\{p,r,s\}\}$.
   D. $\emptyset \in \{s,\{p,r\},\{r,s\}\}$

2. Considerem-se os conjuntos $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c,\{a,b\}\}$ $C = \{\{a,b\},\{b,c\}\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A. $C \subset B$
   B. $A \in C$ e $A \subset C$
   C. $A \in B$ e $A \subset B$.
   D. C tem mais elementos que A.

União, intersecção e complementação

Factos

Dados os conjuntos A e B:

- a união (ou reunião) de A com B é o conjunto $A \cup B$ constituído pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos;
- a intersecção de A com B é o conjunto $A \cap B$ constituído pelos elementos comuns aos dois conjuntos, ou seja, os elementos que pertencem a A e também pertencem a B;
- o complementar de B em A é o conjunto $A \backslash B$ constituído pelos elementos que pertencem a A mas não pertencem a B.

Note-se que

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \backslash A = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \backslash \emptyset = A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C)$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Dois conjuntos A e B dizem-se disjuntos se $A \cap B = \emptyset$.

Exemplos

1. Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{0, 1, 2, 4, 5\}\}$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

$$A \backslash B = \{3\}$$

$$B \backslash A = \{0, 4, 5\}$$

2. Sejam $A = \{1, 2, 3, \{1, 2\}\}$ e $B = \{0, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, \{1, 2\}, \{2, 3\}\}$$

$$A \cap B = \{\{1, 2\}\}$$

$$A \backslash B = \{1, 2, 3\}$$

$$B \backslash A = \{0, \{2, 3\}\}$$

Exercícios

1. Considerem-se os conjuntos $A = \{p, q, r\}$, $B = \{q, r\}$ e $C = \{p, r, s\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A. $A \cap B \subset C$
   B. $A \backslash B = \emptyset$.
   C. $B \backslash A = \{p\}$.
   D. $A \cup B = A$.

2. Considerem-se os conjuntos $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ e $C = \{\{a, b\}, \{b, c\}\}$. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

   A. $A \cup C = C$
   B. $B \backslash A = \{c\}$.
   C. A e C são conjuntos disjuntos.
   D. B e C são conjuntos disjuntos.

3. Considerem-se os conjuntos $A = \{x : \ x \text{ é um número inteiro e } x > 1\}$, $B = \{x : \ x \text{ é um número racional e } x < 9\}$ e $C = \{x : \ x \text{ é um número inteiro par}\}$. O conjunto $(A \cap B) \backslash C$ é igual a

   A. $\{2, 4, 6, 8\}$
   B. $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
   C. $\{3, 5, 7\}$
   D. $\{1, 2, 4, 6, 8, 9\}$