Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - LEIC
Licenciatura em Engenharia de Redes de Comunicação e Informação - LERCI

Exercícios de Teoria da Computação
Autómatos, gramáticas e expressões regulares

Secção Ciência da Computação
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
2005/2006

1 Autómatos finitos

1.1 Autómatos finitos deterministas

1. Defina um autómato finito determinista que, de entre as sequências formadas por elementos de $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$, apenas aceite as que começam por uma letra (i.e., as sequências que são frequentemente utilizadas como identificadores em linguagens de programação).

2. Seja L o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm pelo menos três 1's.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) ϵ (ii) 011 (iii) 111 (iv) 01011

3. Seja L o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) começam por 0; (ii) terminam em 1.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) ϵ (ii) 00 (iii) 010 (iv) 101 (v) 110

4. Seja L o conjunto palavras sobre o alfabeto $\{a, b\}$ que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) contêm dois a's consecutivos, (ii) contêm dois b's consecutivos.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) ϵ (ii) aa (iii) aba (iv) baa

5. Seja L o conjunto das sequências de a's e b's que entre dois a's consecutivos tenham no máximo um b.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) ϵ (ii) ba (iii) bba (iv) aba (iv) $abba$

6. Seja L o conjunto palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ que terminam em 1 e têm um número par de 0's.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) 01 (ii) 111 (iii) 001 (iv) 0110

7. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que contêm pelo menos dois 0's e no máximo um 1.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) 01 (ii) 001 (iii) 0110

8. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que verifiquem pelo menos um dos seguintes requisitos: (i) começam em 0 e têm comprimento par, (ii) começam em 1 e têm comprimento ímpar.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) 01 (ii) 111 (iii) 001 (iv) 0110

9. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's com um número par de 0's e um número ímpar de 1's.

   (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

   (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) 01 (ii) 111 (iii) 001 (iv) 0110

10. Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's não vazias e tal que têm 1 em cada posição ímpar.

    (a) Defina um autómato finito determinista que reconheça exactamente os elementos de L.

    (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) 01 (ii) 101 (iii) 001 (iv) 110

11. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's e b's cujo comprimento seja múltiplo de 4.

12. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que contêm bab como subsequência, ou seja, o conjunto das sequências do tipo $\beta_1 bab \beta_2$ onde β_1 e β_2 são sequências de a's, b's e c's.

13. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que contêm ba ou ca como subsequência, ou seja, o conjunto das sequências do tipo $\beta_1 \alpha \beta_2$ onde β_1 e β_2 são sequências de a's, b's e c's e $\alpha \in \{ba, ca\}$.

14. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que contêm exactamente um c e antes do c, não contêm duas letras consecutivas iguais.

15. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de a's, b's e c's que verificam pelo menos uma das seguintes condições: (i) têm comprimento 1; (ii) começam em ac e terminam em b.

16. Uma constante numérica é constituída por uma parte inteira e por uma parte decimal separadas por ".". A parte inteira é 0 ou uma sequência de dígitos de 0 a 9 que não começa por 0. A parte decimal é uma sequência de dígitos de 0 a 9. O "." pode ser omitido no caso da parte decimal ser vazia. A parte inteira e a parte decimal não podem ser ambas vazias.

    (a) Defina um autómato finito determinista D_1 que reconheça exactamente as sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

    (b) Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida por D_1: (i) .35 (ii) -1.5 (iii) +.41 (iv) -2. (v) +.

    (c) Defina um autómato finito determinista D_2 que reconheça exactamente as sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

    (d) Repita o exercício 16b agora para o autómato D_2.

17. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das palavras sobre $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1@\alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ começa e termina em x, tem pelo menos um "."e não contém dois "." consecutivos.

    Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) xx@x (ii) xxx@x.xx.x. (iii) xx@x.xx.x

    Discuta como a partir deste autómato pode construir um outro autómato finito determinista que apenas aceite as palavras do tipo $\beta_1@\beta_2$ onde β_1 e β_2 verificam requisitos idênticos a α_1 e α_2 mas nas quais, para além da letra x, podem agora ocorrer todas as letras do alfabeto português.

18. Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{\text{-}, 0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, \ldots, Z\}$ que representam matrículas de automóveis válidas em Portugal, ou seja, palavras do tipo α_1-α_2-α_3 que contêm exactamente dois dígitos e em que α_1, α_2 e α_3 são sequências de dois dígitos ou duas letras.

19.
    (a) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

        i. que tenham um número par de 0's.

        ii. que tenham um ímpar de 0's.

        Compare os autómatos obtidos em i. e ii.

    (b) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

i. que terminem com um número ímpar de 1's.

ii. que terminem com um número par de 1's.

Compare os autómatos obtidos em i. e ii.

(c) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

i. que contenham 110 como subsequência.

ii. que não contenham 110 como subsequência.

Compare os autómatos obtidos em i. e ii.

(d) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja o connunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$

i. que começam com 0 e terminam com 1.

ii. não verificam a condição enunciada em i.

Compare os autómatos obtidos em i. e ii.

(e) Proponha um algoritmo que a partir de um autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ construa um autómato finito determinista para a linguagem complementar de L_D, ou seja, um autómato finito determinista $\overline{D}$ tal que $L_{\overline{D}} = I^* \backslash L_D$.

20.

(a) Seja $I = \{0, 1\}$ e considere os autómatos

- $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, p, F_1)$ onde
  - $Q_1 = \{p, q\}$
  -

δ_1	0	1
p	p	q
q	q	p

  - $F_1 = \{q\}$

- $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, r, F_2)$ onde
  - $Q_2 = \{r, s\}$
  -

δ_2	0	1
r	s	r
s	nd	s

  - $F_2 = \{r, s\}$

Caracterize as linguagens L_{D_1} e L_{D_2}.

Considere o autómato $D = (Q, I, \delta, (p, r), F)$ onde

- $Q = Q_1 \times Q_2$
-

δ	0	1
(p, r)	(p, s)	(q, r)
(p, s)	nd	(q, s)
(q, r)	(q, s)	(p, r)
(q, s)	nd	(p, s)

- $F_2 = \{(q,r),(q,s)\}$

Caracterize a linguagem L_D.

(b) Seja $I = \{a, b\}$ e considere os autómatos

- $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0, F_1)$ onde
  - $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$
  -

δ_1	a	b
q_0	q_1	nd
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2

  - $F_1 = \{q_1\}$

- $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, p_0, F_2)$ onde
  - $Q_2 = \{p_0, p_1\}$
  -

δ_2	a	b
p_0	p_0	p_1
p_1	p_1	p_1

  - $F_2 = \{p_1\}$

Caracterize as linguagens L_{D_1} e L_{D_2}.

Considere o autómato $D = (Q, I, \delta, (q_0, p_0), F)$ onde

- $Q = Q_1 \times Q_2$
-

δ	a	b
(q_0, p_0)	(q_1, p_0)	nd
(q_0, p_1)	(q_1, p_1)	nd
(q_1, p_0)	(q_1, p_0)	(q_2, p_1)
(q_1, p_1)	(q_1, p_1)	(q_2, p_1)
(q_2, p_0)	(q_1, p_0)	(q_2, p_1)
(q_2, p_1)	(q_1, p_1)	(q_2, p_1)

- $F_2 = \{(q_1, p_1)\}$

Caracterize a linguagem L_D.

(c) Proponha um algoritmo que a partir de dois autómatos finitos deterministas D_1 e D_2 construa um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_{D_1} \cap L_{D_2}$.

Nota: em certas situações o algoritmo poderá não construir o autómato mais simples para $L_D = L_{D_1} \cap L_{D_2}$.

21. Proponha um algoritmo que a partir de dois autómatos finitos deterministas D_1 e D_2 construa um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_{D_1} \cup L_{D_2}$.

22. Proponha um algoritmo que a partir de dois autómatos finitos deterministas D_1 e D_2 construa um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_{D_1} \backslash L_{D_2}$.

1.2 Equivalência e minimização de autómatos

1. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{p, q, r\}$
   - $I = \{0, 1\}$
   - $\delta(r, 0) = p$
     $\delta(p, 0) = \delta(q, 0) = q$
     $\delta(r, 1) = \delta(p, 1) = \delta(q, 1) = r$
   - $q_0 = p$
   - $F = \{p, q\}$.

   Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

2. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{p, q, r, s\}$
   - $I = \{0, 1\}$
   - $\delta(p, 0) = \delta(q, 0) = \delta(s, 1) = q$
     $\delta(r, 1) = \delta(p, 1) = \delta(q, 1) = r$
     $\delta(s, 0) = \delta(r, 0) = s$
   - $q_0 = p$
   - $F = \{q\}$.

   Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

3. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{p, q, r, s\}$
   - $I = \{a, b\}$
   - $\delta(s, a) = p$
     $\delta(p, b) = \delta(r, a) = q$
     $\delta(q, a) = r$
     $\delta(q, b) = \delta(r, b) = \delta(s, b) = s$
   - $q_0 = p$
   - $F = \{s\}$.

   Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

4. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- $I = \{a, b\}$
- $\delta(p_0, b) = \delta(p_1, b) = p_1$
  $\delta(p_0, a) = \delta(p_1, a) = \delta(p_3, b) = p_2$
  $\delta(p_2, a) = p_3$
  $\delta(p_3, a) = \delta(p_4, a) = \delta(p_4, b) = p_4$
- $q_0 = p_0$
- $F = \{p_3, p_4\}$.

Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

5. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(c, 0) = a$
  $\delta(a, 0) = b$
  $\delta(b, 1) = \delta(c, 1) = \delta(d, 0) = \delta(f, 0) = \delta(h, 1) = c$
  $\delta(g, 1) = e$
  $\delta(a, 1) = \delta(e, 1) = f$
  $\delta(b, 0) = \delta(d, 1) = \delta(f, 1) = \delta(g, 0) = \delta(h, 0) = g$
  $\delta(e, 0) = h$
- $q_0 = a$
- $F = \{c\}$.

Usando o método estudado encontre todos os pares de estados distinguíveis e todos os pares de estados equivalentes deste autómato.

6. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que

- $Q_1 = \{a, b\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta_1(a, 0) = \delta_1(b, 0) = a$
  $\delta_1(a, 1) = \delta_1(b, 1) = b$
- $q_0^1 = a$
- $F_1 = \{a\}$.

e

- $Q_2 = \{c, d, e\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta_2(e, 0) = c$
  $\delta_2(d, 0) = \delta_2(c, 0) = d$
  $\delta_2(e, 1) = \delta_2(c, 1) = \delta_2(d, 1) = e$

- $q_0^2 = c$
- $F_2 = \{c, d\}$.

As linguagens reconhecidas pelos dois autómatos são iguais? Justifique.

7. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que $I = \{a, b\}$ e

   - $Q_1 = \{q_0, q_1\}$
   - $\delta_1(q_0, b) = \delta_1(q_1, a) = q_0$
     $\delta_1(q_1, b) = \delta_1(q_0, a) = q_1$
   - $q_0^1 = q_0$
   - $F_1 = \{q_0\}$.

   e

   - $Q_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $\delta_2(p_0, b) = \delta_2(p_1, b) = \delta_2(p_4, b) = p_1$
     $\delta_2(p_0, a) = \delta_2(p_3, b) = p_2$
     $\delta_2(p_1, a) = \delta_2(p_2, b) = p_3$
     $\delta_2(p_3, a) = \delta_2(p_2, a) = p_4$
   - $q_0^2 = p_0$
   - $F_2 = \{p_0, p_1, p_4\}$.

   (a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_2} e tenha menos estados que D_2? Justifique.

   (b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem em causa e tenha o menor número possível de estados.

   (c) As linguagens reconhecidas pelo dois autómatos são iguais? Justifique.

8. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que $I = \{0, 1\}$ e

   - $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$
   - $\delta_1(q_0, 1) = \delta_1(q_1, 1) = \delta_1(q_2, 1) = q_1$
     $\delta_1(q_1, 0) = \delta_1(q_2, 0) = q_2$
   - $q_0^1 = q_0$
   - $F_1 = \{q_2\}$.

   e

   - $Q_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$
   - $\delta_2(p_0, 1) = \delta_2(p_2, 1) = p_1$
     $\delta_2(p_1, 1) = \delta_2(p_3, 1) = p_2$
     $\delta_2(p_3, 0) = \delta_2(p_1, 0) = \delta_2(p_2, 0) = p_3$

- $q_0^2 = p_0$
- $F_2 = \{p_3\}$.

(a) As linguagens reconhecidas pelo dois autómatos são iguais? Justifique.

(b) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_1} e tenha menos estados que D_1? Justifique.

9. Sejam $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$ e $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$ dois autómatos finitos deterministas tais que $I = \{a, b\}$ e

   - $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2\}$
   - $\delta_1(q_0, b) = q_0$
     $\delta_1(q_0, a) = q_1$
     $\delta_1(q_2, a) = \delta_1(q_2, b) = \delta_1(q_1, a) = q_2$
   - $q_0^1 = q_0$
   - $F_1 = \{q_2\}$.

   e

   - $Q_2 = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}$
   - $\delta_2(p_0, b) = \delta_2(p_1, b) = p_1$
     $\delta_2(p_0, a) = \delta_2(p_1, a) = \delta_2(p_3, b) = p_2$
     $\delta_2(p_2, a) = p_3$
     $\delta_2(p_3, a) = \delta_2(p_4, a) = \delta_2(p_4, b) = p_4$
   - $q_0^2 = p_0$
   - $F_2 = \{p_3, p_4\}$.

   (a) As linguagens reconhecidas pelo dois autómatos são iguais? Justifique.

   (b) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_1} e tenha menos estados que D_1? Justifique.

   (c) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_{D_2} e tenha menos estados que D_2? Justifique.

   (d) Se respondeu afirmativamente a alguma das duas alíneas anteriores, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem em causa e tenha o menor número possível de estados.

10. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

   - $Q = \{p_0, p_1, p_2\}$
   - $I = \{a, b\}$
   - $\delta(p_0, b) = \delta(p_1, a) = p_0$
     $\delta(p_0, a) = \delta(p_2, b) = p_1$
     $\delta(p_1, b) = \delta(p_2, a) = p_2$

- $q_0 = p_0$
- $F = Q$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

11. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{p_0, p_1, p_2\}$
- $I = \{a, b\}$
- $\delta(p_0, b) = \delta(p_1, a) = p_0$
  $\delta(p_0, a) = \delta(p_2, b) = p_1$
  $\delta(p_1, b) = \delta(p_2, a) = p_2$
- $q_0 = p_0$
- $F = \{p_0, p_2\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

12. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$
- $I = \{a, b, c, d\}$
- $\delta(p_0, a) = \delta(p_1, d) = p_1$
  $\delta(p_0, b) = \delta(p_2, d) = p_2$
  $\delta(p_0, c) = \delta(p_3, d) = p_3$
  $\delta(p_1, a) = \delta(p_2, a) = \delta(p_3, a) = p_4$
  $\delta(p_4, b) = \delta(p_6, a) = p_5$
  $\delta(p_5, a) = p_6$
- $q_0 = p_0$
- $F = \{p_5, p_6\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

13. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$
- $I = \{a, b\}$
- $\delta(p_0, b) = \delta(p_2, a) = p_1$
  $\delta(p_1, a) = \delta(p_5, b) = p_2$
  $\delta(p_1, b) = \delta(p_2, b) = \delta(p_3, a) = \delta(p_4, b) = p_3$
  $\delta(p_3, b) = p_4$
  $\delta(p_4, a) = \delta(p_5, a) = p_5$
- $q_0 = p_0$
- $F = \{p_3\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

14. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(c, 0) = a$
  $\delta(a, 0) = b$
  $\delta(b, 1) = \delta(c, 1) = \delta(d, 0) = \delta(f, 0) = \delta(h, 1) = c$
  $\delta(g, 1) = e$
  $\delta(a, 1) = \delta(e, 1) = f$
  $\delta(b, 0) = \delta(d, 1) = \delta(f, 1) = \delta(g, 0) = \delta(h, 0) = g$
  $\delta(e, 0) = h$
- $q_0 = a$
- $F = \{c\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

15. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(a, 1) = \delta(b, 0) = \delta(d, 1) = a$
  $\delta(a, 0) = \delta(c, 1) = b$
  $\delta(b, 1) = c$
  $\delta(c, 0) = \delta(d, 0) = \delta(e, 0) = \delta(h, 1) = d$
  $\delta(f, 1) = e$

$\delta(e,1) = \delta(g,0) = f$
$\delta(f,0) = \delta(g,1) = \delta(h,0) = g$

- $q_0 = a$
- $F = \{d\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

16. Considere o autómato finito determinista $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $\delta(i,0) = a$
  $\delta(a,0) = \delta(f,1) = \delta(g,1) = b$
  $\delta(b,0) = \delta(h,1) = c$
  $\delta(c,1) = d$
  $\delta(a,1) = \delta(i,1) = e$
  $\delta(b,1) = \delta(e,0) = f$
  $\delta(f,0) = g$
  $\delta(c,1) = \delta(d,1) = \delta(g,0) = h$
  $\delta(e,1) = \delta(h,0) = i$
- $q_0 = a$
- $F = \{c, f, i\}$.

(a) Existe algum autómato que reconheça exactamente L_D e tenha menos estados que D? Justifique.

(b) Se respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente L_D e tenha o menor número possível de estados.

17. Considere os autómatos finitos deterministas que construiu nos exercícios da secção 1.1.

(a) Esses autómatos podem ser minimizados relativamente ao número de estados?

(b) Nos casos em que respondeu afirmativamente à alínea anterior, construa um autómato finito determinista que reconheça exactamente a linguagem em causa e tenha o menor número possível de estados.

1.3 Autómatos finitos não deterministas

1. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

   - $Q = \{p, q, r\}$,
   - $I = \{0, 1, 2\}$
   - $\delta(p, 0) = \{q\}$, $\delta(p, 1) = \{p, q\}$, $\delta(p, 2) = \{p\}$,
     $\delta(q, 1) = \{q, r\}$,
     $\delta(r, 2) = \{r\}$,
     $\delta(q, 0) = \delta(q, 2) = \delta(r, 0) = \delta(r, 1) = \emptyset$,
   - $q_0 = p$
   - $F = \{q, r\}$.

   Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

   (i) 11 (ii) 10 (iii) 120 (iv) 212 (v) 2112 (vi) 2212 (vii) 0112

2. Considere o seguinte autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

   - $Q = \{p, q, r\}$,
   - $I = \{x, y, z\}$
   - $\delta(p, y) = \delta(p, z) = \delta(q, x) = \{p\}$,
     $\delta(r, z) = \{q\}$,
     $\delta(r, y) = \{r\}$,
     $\delta(p, x) = \delta(q, z) = \{q, r\}$,
     $\delta(q, y) = \delta(r, x) = \emptyset$,
   - $q_0 = p$
   - $F = \{r\}$.

   Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato A:

   (i) xy (ii) zx (iii) xxz (iv) yxy (v) 2112 (vi) $zyxx$ (vii) $xzxx$

3. Seja L o conjunto das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm 1 na penúltima posição.

   (a) Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.
   (b) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja L.

4. Seja L o conjunto das das palavras sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm 1 na antepenúltima posição.

   (a) Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.
   (b) Defina um autómato finito determinista cuja linguagem seja L.

5. Seja L o conjunto das sequências não vazias de a's, b's e c's nas quais o último símbolo ocorre pelo menos duas vezes em toda a sequência. Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.

   Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) aca (ii) bbc (iii) $abcb$

6. Seja L o conjunto das sequências não vazias de a's, b's e c's nas quais o último símbolo ocorre uma única vez em toda a sequência. Defina um autómato finito não determinista cuja linguagem seja L.

   Verifique se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato: (i) aca (ii) bbc (iii) $accb$

7. Seja L a linguagem constituída pelas palavras sobre o alfabeto $\{0, 1, 2\}$ do tipo $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ onde $\alpha_1 \in \{0\}^*$, $\alpha_2 \in \{1\}^+$, $\alpha_3 \in \{2\}^*$ e tal que se α_1 é ϵ então α_2 é 1. Defina um autómato finito não determinista A, com três estados, tal que $L_A = L$.

8. Seja L a linguagem constituída pelas palavras sobre $\{a, b, c\}$ do tipo $\alpha\beta$ onde α é uma sequência não vazia e $\beta \in \{a\}^+$ ou $\beta \in \{b\}^+$. Defina um autómato finito não determinista A, com três estados, tal que $L_A = L$.

9. Considere o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A^\epsilon = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

   tal que

δ	0	1	2	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\emptyset$

   Verifique se as sequências

   (i) 00 (ii) 012 (iii) 022 (iv) 122 (v) 2112

   fazem parte da linguagem reconhecida por A^ϵ e caracterize a linguagem reconhecida pelo autómato.

10. Considere o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A^\epsilon = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1, a, b\}, \delta, q_0, \{q_5\})$$

   tal que

δ	0	1	a	b	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_3\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_5\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_5\}$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Verifique se as sequências

(i) 110 (ii) 101 (iii) ba (iv) abb

fazem parte da linguagem reconhecida por A^ϵ e caracterize a linguagem reconhecida pelo autómato.

11. Caracterize a linguagem reconhecida pelo autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A^\epsilon = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b, c\}, \delta, q_0, \{q_2, q_3\})$$

tal que

δ	a	b	c	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

12. Caracterize a linguagem reconhecida pelo autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A^\epsilon = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1, a, b\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

tal que

δ	0	1	a	b	ϵ
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

13.

(a) Seja $I = \{a, b\}$ e considere os autómatos

- $A = (Q_A, I, \delta_A, q_0^A, F_A)$ onde
  - $Q_A = \{q_0, q_1\}$
  -

δ_A	a	b
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_1\}$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$

  - $q_0^A = q_0$
  - $F_A = \{q_1\}$

- $D = (Q_D, I, \delta_D, q_0^D, F_D)$ onde
  - $Q_D = \{q_0, q_1, q_0q_1, \emptyset\}$

–

δ_D	a	b
q_0	q_0q_1	q_1
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$
q_0q_1	q_0q_1	q_1
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

– $q_0^D = q_0$
– $F_D = \{q_1, q_0q_1\}$

Caracterize as linguagens L_A e L_D. Compare os autómatos A e D.

(b) Seja $I = \{0, 1, 2\}$ e considere os autómatos

- $A = (Q_A, I, \delta_A, q_0^A, F_A)$ onde
  – $Q_A = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
  –

δ_A	0	1	2
q_0	$\emptyset$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_1, q_3\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2, q_3\}$
q_3	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

  – $q_0^A = q_0$
  – $F_A = \{q_3\}$

- $D = (Q_D, I, \delta_D, q_0^D, F_D)$ onde
  – $Q_D = \{q_0, q_3, q_1q_3, q_2q_3, q_1q_2q_3, \emptyset\}$
  –

δ_D	0	1	2
q_0	$\emptyset$	$q_1q_2q_3$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	q_3	$\emptyset$
q_1q_3	q_1q_3	q_3	$\emptyset$
q_2q_3	$\emptyset$	q_3	q_2q_3
$q_1q_2q_3$	q_1q_3	q_3	q_2q_3
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

  – $q_0^D = q_0$
  – $F_D = \{q_3, q_1q_3, q_2q_3, q_1q_2q_3\}$

Caracterize as linguagens L_A e L_D. Compare os autómatos A e D.

(c) Esboce um algoritmo que a partir de um autómato finito não determinista A construa um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

(d) Use o algoritmo esboçado na alínea anterior para construir autómatos finitos deterministas que reconheçam as linguagens dos autómatos finitos não deterministas referidos nos exercícios 1, 2, 5, 6, 7 e 8.

14.

(a) Considere o autómato finito não determinista sem movimentos ϵ

$$A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1, 2\}, \delta_A, q_0, \{q_0, q_2\})$$

tal que

δ_A	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Caracterize a linguagem de A e compare-a com a linguagem do autómato finito não determinista com movimentos ϵ do exercício 9. Compare os dois autómatos.

(b) Considere o autómato finito não determinista sem movimentos ϵ

$$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0, 1, a, b\}, \delta_A, q_0, \{q_5\})$$

tal que

δ	0	1	a	b
q_0	$\{q_3, q_5\}$	$\{q_1\}$	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{q_3, q_5\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_4, q_5\}$	$\{q_2\}$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_5	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

Caracterize a linguagem de A e compare-a com a linguagem do autómato finito não determinista com movimentos ϵ do exercício 10. Compare os dois autómatos.

(c) Esboce um algoritmo que a partir de um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A^ϵ, construa um autómato finito não determinista sem movimentos ϵ, A, tal que $L_A = L_{A^\epsilon}$.

(d) Use o algoritmo esboçado na alínea anterior para construir autómatos finitos não deterministas sem movimentos ϵ que reconheçam as linguagens dos autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ referidos nos exercícios 11 e 12.

1.4 Exercícios complementares

1. Mostre que a linguagem reconhecida por um autómato finito não determinista é sempre uma linguagem regular, ou seja, dado um autómato finito não determinista A é sempre possível construir um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_A$.

2.

   (a) Esboce um algoritmo que a partir de dois autómatos finitos não deterministas A_1 e A_2 construa autómato finito não determinista A tal que $L_A = L_{A_1} \cup L_{A_2}$.

(b) Repita o exercício anterior assumindo que os autómatos envolvidos podem ser autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ.

3.
   (a) Esboce um algoritmo que a partir de dois autómatos finitos não determinista A_1 e A_2 construa autómato finito não determinista A tal que $L_A = L_{A_1} L_{A_2}$.
   (b) Repita o exercício anterior assumindo que os autómatos envolvidos podem ser autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ.

4.
   (a) Esboce um algoritmo que a partir de um autómato finito não determinista A construa um autómato finito não determinista A' tal que $L_{A'} = (L_A)^*$.
   (b) Repita o exercício anterior assumindo que os autómatos envolvidos podem ser autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ.

5. Sendo L e L' linguagens regulares sobre um alfabeto I mostre que as seguintes linguagens são também regulares.
   (a) $I^* \backslash L$
   (b) $L \cap L'$
   (c) $L \cup L'$
   (d) $L \backslash L'$
   (e) L^*
   (f) $LL' = \{ww' : w \in L \text{ e } w' \in L'\}$
   (g) $L_1 = \{w : w \in L$ e não existe nenhum prefixo próprio de w que pertença a $L\}$
   (h) $L_2 = \{w : w \in L$ e não existe nenhuma sequência não vazia w' tal que $ww' \in L\}$
   (i) $L_3 = \{w :$ existe uma sequência w' tal que $ww' \in L\}$
   (j) $L^r = \{w^r : w \in L\}$ onde, sendo $w = a_1 a_2 \ldots a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $w^r = a_n \ldots a_2 a_1$

6. Mostre que a linguagem $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$ não é regular.

7. Mostre que a linguagem constituída pelas sequências de 0's e 1's que têm o mesmo número de 0's e de 1's não é regular.

8. Discuta as afirmações seguintes.
   (a) A linguagem $L = \{0^n 1^n 2^n : n \geq 0\}$ é regular.
   (b) A linguagem $L = \{ww : w \in \{a, b\}^*\}$ não é regular.
   (c) A linguagem $L = \{w \in \{0, 1\}^* : w = 0^n 1^{f(n)}, n \geq 0\}$ é regular considerando $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ tal que
      i. $f(n) = 0$

ii. $f(n) = k$ onde k é uma constante

iii. $f(n) = 2n$

iv. $f(n) = n^2$

(d) A linguagem $L = \{(10)^n(01)^n : n \geq 0\}$ é regular.

(e) A linguagem constituída pelas sequências de 0's, 1's e 2's que são palíndromos ("capicuas") não é regular.

2 Gramáticas

2.1 Gramáticas regulares

1. Considere a gramática regular tal que $G = (V, I, P, S)$
   $V = \{S, B, C, D\}$
   $I = \{0, 1\}$
   $P = \{(S, 0B), (S, 1C), (S, 0C), (B, 0S), (B, 1D), (B, 1B), (C, 1S), (C, 0D), (B, \varepsilon),$
   $(C, \varepsilon), (D, 0C), (D, 1B)\}$

   Apresente uma demonstração para as palavras:

   (i) 0111 (ii) 1101 (iii) 01110 (iv) 10011

2. Considere a gramática regular $G = (V, I, P, S)$ tal que
   $V = \{A, B, C, D\}$ $I = \{x, y, z\}$
   $P = \{(A, xB), (A, xC), (A, x), (B, yB), (B, yA), (C, xD), (D, zD), (D, zA)\}$
   $S = A$

   Encontre uma demonstração para as palavras:

   (i) $xyxyx$ (ii) $xxzzx$ (iii) $xyxxzx$ (iv) $xxzxyx$

3. Defina gramáticas regulares que gerem exactamente a linguagem das palavras sobre:

   (a) o alfabeto $\{0, 1\}$ que comecem em 11;

   (b) o alfabeto $\{0, 1\}$ que terminem em 00;

   (c) o alfabeto $\{0, 1\}$ que comecem e terminem em 1;

   (d) o alfabeto $\{0, 1\}$ que comecem em 0 ou terminem em 1;

   (e) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm 1 na penúltima posição;

   (f) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm 1 na antepenúltima posição;

   (g) o alfabeto $\{0, 1\}$ do tipo $w_1 w_2$ onde $w_1 \in \{0\}^*$, $w_2 \in \{1\}^*$, w_1 tem comprimento par e w_2 tem comprimento ímpar;

   (h) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm um número par de 1's;

   (i) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm um número par de 1's e um número ímpar de 0's;

   (j) o alfabeto $\{0, 1\}$ tais que entre quaisquer dois 1's consecutivos existam exactamente dois 0's;

(k) o alfabeto $\{0, 1, 2\}$ cuja soma de dois dígitos consecutivos seja inferior ou igual a 2;

(l) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm pelo menos dois 1's;

(m) o alfabeto $\{0, 1\}$ que contêm a sequência 010;

(n) o alfabeto $\{0, 1\}$ que não contêm a sequência 110;

(o) o alfabeto $\{0, 1\}$ que começam em 0 e têm comprimento par;

(p) o alfabeto $\{0, 1\}$ que começam em 1 e têm comprimento ímpar;

(q) o alfabeto $\{0, 1\}$ que são distintas de 11 e de 111;

(r) o alfabeto $\{0, 1\}$ não vazias e que têm 1 em cada posição ímpar;

(s) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm pelo menos dois 0's e no máximo um 1;

(t) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm um número par 0's ou exactamente dois 1's;

(u) o alfabeto $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$ que começam por uma letra;

(v) o alfabeto $\{a, b\}$ cujo comprimento seja múltiplo de 4;

(w) o alfabeto $\{a, b, c\}$ que contêm exactamente um c e antes do c, não contêm duas letras consecutivas iguais;

(x) o alfabeto $\{a, b, c\}$ que verificam pelo menos uma das seguintes condições: (i) têm comprimento 1; (ii) começam em ac e terminam em b.

4. Considere a linguagem L constituída pelas palavras sobre o alfabeto $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1@\alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ é uma sequência que começa e termina em x, tem pelo menos um "." e não contém dois "." consecutivos.

   (a) Defina uma gramática regular tal que $L_G = L$. Modifique esta gramática de modo a obter uma gramática regular que apenas aceite as sequências do tipo $\beta_1@\beta_2$ onde verificam requisitos idênticos aos de α_1 e α_2 mas em vez de apenas poder ocorrer a letra x podem agora ocorrer todas as letras do alfabeto português.

   (b) Mostre que as seguintes sequências fazem parte da linguagem gerada pela gramática G: (i) xx@x (ii) xxx@x.xx.x. (iii) xx@x.xx.x

5. Uma constante numérica é constituída por uma parte inteira e por uma parte decimal separadas por ".". A parte inteira é 0 ou uma sequência de dígitos de 0 a 9 que não começa por 0. A parte decimal é uma sequência de dígitos de 0 a 9. O "." pode ser omitido no caso da parte decimal ser vazia. A parte inteira e a parte decimal não podem ser ambas vazias.

   (a) Defina uma gramática regular G_1 que gere exactamente as sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

   (b) Defina uma gramática regular G_2 que gere exactamente as sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

(c) Mostre que as seguintes sequências fazem parte da linguagem gerada por G_1: (i) -1.5 (ii) +.41

(d) Mostre que as seguintes sequências fazem parte da linguagem gerada por G_2: (i) .35 (ii) -1.5 (iii) -2.

6.

(a) Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm um número par de 0's e um número ímpar de 1's;.

i. Construa um autómato finito determinista D tal que $L_D = L$.

ii. Construa uma gramática regular G tal que $L_G = L$.

Compare o autómato D com a gramática G.

(b) Seja L o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm 1 na antepenúltima posição.

i. Construa um autómato finito não determinista A tal que $L_A = L$.

ii. Construa uma gramática regular G tal que $L_G = L$.

Compare o autómato A com a gramática G.

(c) Proponha um algoritmo que a partir de uma gramática regular G arbitrária construa um autómato finito não determinista A tal que $L_A = L_G$.

(d) Proponha um algoritmo que a partir de um autómato finito não determinista A arbitrário construa uma gramática regular G tal que $L_G = L_A$. Particularize o algoritmos para o caso de autómatos finitos deterministas.

2.2 Gramáticas independentes do contexto

1. Considere a gramática independente do contexto $G = (V, I, P, S)$ tal que
$V = \{S, A, B\}$ $I = \{0, 1\}$
$P = \{(S, \epsilon), (S, A), (S, B), (A, 0A1), (A, \epsilon), (B, 1B0), (B, \epsilon)\}$

   Encontre uma demonstração para as palavras:

   (i) 0011 (ii) 1100 (iii) 00001111

2. Considere a gramática independente do contexto $G = (V, I, P, S)$ tal que
$V = \{S, A, B\}$ $I = \{x, y\}$
$P = \{(S, AA), (S, BB), (A, xAy), (A, x), (B, yBx), (B, yy)\}$

   Encontre uma demonstração para as palavras:

   (i) $xxxyyx$ (ii) $yyyyxxyyyx$

3. Considere a linguagem sobre o alfabeto $\{x, y\}$ constituídas pelas palavras do tipo $x^{2n}y^{2n}$, com $n \geq 1$.

   (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere esta linguagem.

(b) Apresente uma demonstração para as palavras: : (i) xxyy (ii) xxxxyyyy

4. Considere a linguagem sobre o alfabeto $\{a, b\}$ constituídas pelas palavras do tipo $a^{n+1}b^{n-1}$, com $n \geq 1$.

   (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere esta linguagem.

   (b) Apresente uma demonstração para as palavras: : (i) aa (ii) aaaabb

5. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ cujo comprimento é um número ímpar e cujo símbolo do meio é um 0.

   (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere exactamente estas sequências.

   (b) Apresente uma demonstração para as palavras: : (i) 11010 (ii) 1010010

6. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{0, 1, 2\}$ que são palíndromos ("capicuas").

   (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere exactamente estas sequências.

   (b) Apresente uma demonstração para as palavras: (i) 2112 (ii) 012210

7. Considere a linguagem sobre o alfabeto $\{0, 1\}$ constituídas pelas palavras que têm o mesmo número de 0's e de 1's.

   (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere esta linguagem.

   (b) Apresente uma demonstração para as palavras: : (i) 1010 (ii) 001011

8. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{0, ..., 9, +, \times, (,)\}$ que representam expressões aritméticas sobre naturais (um natural é uma sequência não vazia de dígitos w tal que se $|w| > 1$ então w não começa por 0) com as convenções usuais tendo as operações de soma e multiplicação notação infixa.

   (a) Construa uma gramática de contexto que gere exactamente estas sequências.

   (b) Apresente uma demonstração para as palavras:
   (i) $(12 + 3) \times 25$ (ii) $123 + 10 \times 7$

9. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{a, \ldots, z, 0, ..., 9, +, \times, (,)\}$ que representam expressões aritméticas sobre naturais e identificadores (um identificador é uma sequência não vazia de elementos de $\{a, \ldots, z, 0, ..., 9\}$ que começa por uma letra) com as convenções usuais.

   (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere exactamente estas sequências.

(b) Apresente uma demonstração para as palavras:
(i) $x \times 122 + y$ (ii) $(z0 + (35 + z1)) \times 24$

10. Considere as sequências sobre o alfabeto $\{T, F, and, or, not, (,)\}$ que representam expressões booleanas sobre as constantes T e F com as convenções usuais sendo *and* e *or* operadores infixos e *not* operador prefixo e *not*.

    (a) Construa uma gramática independente do contexto que gere exactamente estas sequências.

    (b) Apresente uma demonstração para as palavras:
    (i) $T\, and\, not\, F$ (ii) $not(T\, or\, F) and\, T$

11. Considere uma linguagem de programação simples que tenha comandos de atribuição do tipo $idvar$ `:=` exp (onde $idvar$ representa um identificador de uma variável e exp uma expressão), comandos de composição sequencial do tipo `[`C_1`;`...`;`C_n`]` (onde cada C_i representa um comando), comandos condicionais do tipo `if then` e `if then else` e comandos iterativos do tipo `while do` e `repeat until` cuja sintaxe é a habitual nas linguagens de programação imperativas usuais (e.g C).

    (a) Construa uma gramática independente do contexto que descreva o fragmento da linguagem relativo à sintaxe dos comandos. (Sugestão: como símbolos não terminais inclua, entre outros, os símbolos *Stm*, *Loopstm*, *Expression*, *Idvar*, *Condition*; como símbolos terminais inclua, entre outros, os símbolos `if`, `then`, `while`).

    (b) Apresente uma demonstração para as palavras:
    (i) `while` *Condition* `do` *Idvar* `:=` *Expression*
    (ii) `if` *Condition* `then` `[`*Idvar* `:=` *Expression*`;`*Idvar* `:=` *Expression*`]`

2.3 Exercícios complementares

1. (a) Caracterize as linguagens geradas pelas gramáticas G_1 e G_2 seguintes

    - $G_1 = (\{S_1, A\}, \{0, 1\}, P_1, S_1)$ em que $P_1 :: \begin{array}{l} S_1 \rightarrow 1S_1 \mid 0A \\ A \rightarrow 0A \mid \epsilon \mid 1 \end{array}$
    - $G_2 = (\{S_2, B\}, \{0, 1\}, P_2, S_2)$ em que $P_2 :: \begin{array}{l} S_2 \rightarrow 1B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 0S_2 \end{array}$

    (b) Caracterize a linguagem gerada por $G = (\{S, S_1, S_2, A, B\}, \{0, 1\}, P, S)$ em que

$$P :: \begin{array}{l} S \rightarrow 1S_1 \mid 0A \mid 1B \mid \epsilon \\ S_1 \rightarrow 1S_1 \mid 0A \\ A \rightarrow 0A \mid \epsilon \mid 1 \\ S_2 \rightarrow 1B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 0S_2 \end{array}$$

    e compare-a com as linguagens geradas por G_1 e G_2.

(c) Esboce um algoritmo que a partir de duas gramáticas regulares arbitrárias G_1 e G_2 construa uma gramática regular G tal que $L_G = L_{G_1} \cup L_{G_2}$.

2. (a) Caracterize a linguagem gerada por $G = (\{S_1, S_2, A, B\}, \{0,1\}, P, S_1)$ em que

$$P :: \begin{array}{l} S_1 \rightarrow 1S_1 \mid 0A \\ A \rightarrow 0A \mid 1B \mid \epsilon \mid 1S_2 \\ S_2 \rightarrow 1B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 0S_2 \end{array}$$

e compare-a com as linguagens geradas por G_1 e G_2 do exercício 1a.

(b) Esboce um algoritmo que a partir de duas gramáticas regulares arbitrárias G_1 e G_2 construa uma gramática regular G tal que $L_G = L_{G_1} L_{G_2}$.

3. (a) Caracterize a linguagem gerada por $G = (\{S, S_1, A\}, \{0,1\}, P, S)$ em que

$$P :: \begin{array}{l} S \rightarrow \epsilon \mid 1S_1 \mid 0A \\ S_1 \rightarrow 1S_1 \mid 0A \\ A \rightarrow 0A \mid 1S_1 \mid 0S_1 \mid 1 \mid \epsilon \end{array}$$

e compare-a com as linguagem gerada por G_1 do exercício 1a.

(b) Esboce um algoritmo que a partir de uma gramática regular arbitrária G construa uma gramática regular G' tal que $L_{G'} = (L_G)^*$.

3 Expressões regulares

1. Considere as seguintes expressões regulares sobre o alfabeto $\{0,1\}$

- $0^* + 1^*$
- 0^*1^*
- $(00)^*1(11)^*$
- $0(10)^*1$
- $(111)^*$
- $0(10 + 01)^*1$
- $01^*(0 + \varepsilon)$
- $0^*10^* + 0^*$
- $0(10)^* + 1(01)^*$
- $(0 + 1)^*1(0 + 1)^*$
- $0^*1(0 + 1)^*$

- $(0+1)^*00(0+1)^*$
- $(01+11)^*00(0+1)^*$
- $(0+01+11)(0+1)^*$
- $(0+1)^*1(0+1)^*1(0+1)^*0$

(a) Para cada uma das expressões acima indique três sequências que pertençam à linguagem denotada pela expressão e três sequências que não pertençam à linguagem denotada pela expressão.

(b) Para cada uma das expressões acima descreva a linguagem denotada pela expressão.

2. Seja L a linguagem das palavras sobre o alfabeto $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$ que começam por uma letra. Encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

3. Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das palavras sobre

(a) o alfabeto $\{0, 1\}$ que comecem em 11;

(b) o alfabeto $\{0, 1\}$ que terminem em 00;

(c) o alfabeto $\{0, 1\}$ que comecem e terminem em 1;

(d) o alfabeto $\{0, 1\}$ que comecem em 0 ou terminem em 1;

(e) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm 1 na penúltima posição;

(f) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm 1 na antepenúltima posição;

(g) o alfabeto $\{0, 1\}$ do tipo w_1w_2 onde $w_1 \in \{0\}^*$, $w_2 \in \{1\}^*$, w_1 tem comprimento par e w_2 tem comprimento ímpar;

(h) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm um número par de 1's;

(i) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm um número par de 1's e um número ímpar de 0's;

(j) o alfabeto $\{0, 1\}$ tais que entre quaisquer dois 1's consecutivos existam exactamente dois 0's;

(k) o alfabeto $\{0, 1, 2\}$ cuja soma de dois dígitos consecutivos seja inferior ou igual a 2;

(l) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm pelo menos dois 1's;

(m) o alfabeto $\{0, 1\}$ que contêm a sequência 010;

(n) o alfabeto $\{0, 1\}$ que não contêm a sequência 110;

(o) o alfabeto $\{0, 1\}$ que começam em 0 e têm comprimento par;

(p) o alfabeto $\{0, 1\}$ que começam em 1 e têm comprimento ímpar;

(q) o alfabeto $\{0, 1\}$ que são distintas de 11 e de 111;

(r) o alfabeto $\{0, 1\}$ não vazias e que têm 1 em cada posição ímpar;

(s) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm pelo menos dois 0's e no máximo um 1;

(t) o alfabeto $\{0, 1\}$ que têm um número par 0's ou exactamente dois 1's;

(u) o alfabeto $\{a, ..., z, 0, ..., 9\}$ que começam por uma letra (i.e., as sequências que são, frequentemente, utilizadas como identificadores em linguagens de programação);

(v) o alfabeto $\{a, b\}$ cujo comprimento seja múltiplo de 4;

(w) o alfabeto $\{a, b, c\}$ que contêm exactamente um c e antes do c, não contêm duas letras consecutivas iguais;

(x) o alfabeto $\{a, b, c\}$ que verificam pelo menos uma das seguintes condições: (i) têm comprimento 1; (ii) começam em ac e terminam em b.

4. Considere a linguagem L constituída pelas palavras sobre $\{x, ., @\}$ do tipo $\alpha_1 @ \alpha_2$ onde $\alpha_1 \in \{x\}^*$ é uma sequência não vazia e $\alpha_2 \in \{x, .\}^*$ é uma sequência que começa e termina em x, tem pelo menos um "." e não contém dois "." consecutivos. Encontre uma expressão regular α tal que $L(\alpha) = L$.

   Refaça o exercício considerando agora que as sequências podem conter não só x como também qualquer letra do alfabeto português.

5. Uma constante numérica é constituída por uma parte inteira e por uma parte decimal separadas por ".". A parte inteira é 0 ou uma sequência de dígitos de 0 a 9 que não começa por 0. A parte decimal é uma sequência de dígitos de 0 a 9. O "." pode ser omitido no caso da parte decimal ser vazia. A parte inteira e a parte decimal não podem ser ambas vazias.

   (a) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

   (b) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

6. Encontre uma expressão regular que denote a linguagem constituída pelas palavras sobre o alfabeto $\{\text{-}, 0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, \ldots, Z\}$ que representam matrículas de automóveis válidas em Portugal, ou seja, palavras do tipo α_1-α_2-α_3 que contêm exactamente dois dígitos e em que α_1, α_2 e α_3 são sequências de dois dígitos ou duas letras.

   (a) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências do tipo $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica com parte decimal não vazia.

   (b) Encontre uma expressão regular que denote o conjunto das sequências do tipo w, $+w$ ou $-w$ onde w é uma constante numérica.

7. Indique uma expressão regular que denote cada um dos seguintes conjuntos:

   (a) $\{xy : x \in \{11, 0\}^* \wedge y \in \{00, 1\}^*\}$

   (b) $\{01x : x \in \{01\}^*\} \cup \{0x : x \in \{01\}^*\}$

(c) $\{0x1y : x, y \in \{0\}^* \cup \{1\}^*\}$

(d) $\{xyz : x, y, z \in \{0, 1\} \wedge x + y + z \leq 2\}$

8. Verifique que

   (a) $\alpha\emptyset = \emptyset$

   (b) $\emptyset^* = \epsilon$

   (c) $\alpha\epsilon = \alpha$

   (d) $\epsilon^* = \epsilon$

   (e) $\alpha^* + \epsilon = \alpha^*$

   (f) $\alpha^* + \alpha^+ = \alpha^*$ (sendo α^+ uma abreviatura de $\alpha\alpha^*$)

   (g) $\alpha^*\alpha = \alpha\alpha^*$

   (h) $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma$

   (i) $(\alpha^*)^* = \alpha^*$

   (j) $(\alpha\beta)^* = \alpha(\beta\alpha)^*\beta$

9. Simplifique as seguintes expressões regulares:

   (a) $b(aa^* + \epsilon)^* + bba^*$

   (b) $(ab^* + (a + b)b^*)(b + \varepsilon)$

   (c) $(aa^*a + caa) + (a^*b + cb)$

   (d) $(b(b + \emptyset^*) + \emptyset^*)^*ca + b(b^*c + bb^*a)$

   (e) $(ab + a)b^*(a(a + b)^* + b(b + a)^*)^*$

10. Sendo $I = \{0, 1\}$, verifique se, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in R_I$,

    (a) $(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^*$

    (b) $(\alpha + \beta)^*\beta = (\alpha^*\beta)^*$

    (c) $\alpha^*\beta = \beta\alpha^*$

    (d) $(\alpha\beta + \alpha)^*\alpha\beta = (\alpha\alpha^*\beta)^*$

    (e) $(\alpha\beta + \alpha)^*\alpha = \alpha(\beta\alpha + \alpha)^*$

    (f) $\alpha^* + \beta\beta^* = \alpha\alpha^* + \beta^*$

11.

    (a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in R_I$ e G_1 e G_2 duas gramáticas regulares tais que $L_{G_1} = L(\alpha_1)$ e $L_{G_2} = L(\alpha_2)$. Construa uma gramática regular G tal que

        i. $L_G = L(\alpha_1 + \alpha_2)$

        ii. $L_G = L(\alpha_1\alpha_2)$

        iii. $L_G = L(\alpha_1^*)$.

    (b) Proponha um algoritmo que a partir uma expressão regular arbitrária α construa uma gramática regular G tal que $L_G = L(\alpha)$.

(c) Use o algoritmo esboçado na alínea anterior para construir uma gramática regular que gere a linguagem denotada por

   i. $(0+1)^*0$
   ii. 0^*1+0
   iii. $(0(1+0)1)^*$.

12.

(a) Sejam $\alpha_1, \alpha_2 \in R_I$ e A_1 e A_2 autómatos finitos não deterministas tais que $L_{A_1} = L(\alpha_1)$ e $L_{A_2} = L(\alpha_2)$. Construa um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A^ϵ tal que

   i. $L_{A^\epsilon} = L(\alpha_1 + \alpha_2)$
   ii. $L_{A^\epsilon} = L(\alpha_1\alpha_2)$
   iii. $L_{A^\epsilon} = L(\alpha_1^*)$.

(b) Proponha um algoritmo que a partir uma expressão regular arbitrária α construa um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A^ϵ, tal que $L_{A^\epsilon} = L(\alpha)$.

(c) Use o algoritmo esboçado na alínea anterior para construir um autómato finito não determinista com movimentos ϵ cuja linguagem seja a linguagem denotada por

   i. $(0+1)^*0$
   ii. 0^*1+0
   iii. $(0(1+0)1)^*$.