Licenciatura em Engenharia Informática e de Computadores - LEIC
Licenciatura em Engenharia de Redes de Comunicação e Informação - LERCI

Exercícios de Teoria da Computação

Lógica

Secção Ciência da Computação
Departamento de Matemática
Instituto Superior Técnico
2005/2006

1 Sintaxe e semântica

1. Defina uma gramática cuja linguagem seja o conjunto das fórmulas proposicionais sobre o conjunto de símbolos proposicionais $\{p_0, p_1, \ldots, p_{100}\}$.

2. Sejam ψ_1, ψ_2 e ψ_3 símbolos proposicionais. Verifique se

   (a) $V \models \psi_1 \rightarrow ((\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = 1$

   (b) $V \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = 0$

   (c) $V \models (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = 1$

   (d) $V \models (\psi_1 \rightarrow \psi_2) \vee (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = 0$

   (e) $V \models (\psi_1 \rightarrow (\psi_2 \vee \psi_3)) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_3)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_3) = 1$

   (f) $V \models ((\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow \psi_3) \rightarrow ((\neg\psi_2) \rightarrow (\neg\psi_3))$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = V(\psi_3) = 0$

   (g) $V \models ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_1) \rightarrow \psi_1$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = 0$

   (h) $V \models (\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3) \wedge (\psi_3 \rightarrow (\neg\psi_2))$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = V(\psi_3) = 1$

   (i) $V \not\models ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\neg\psi_1)) \rightarrow (\neg\psi_2)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = V(\psi_2) = 1$

   (j) $V \not\models (((\neg\psi_1) \vee \psi_1) \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_2$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_2) = 1$

   (k) $V \not\models (\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = 0$ e $V(\psi_2) = 0$

   (l) $V \not\models ((\neg\psi_1) \vee \psi_2) \rightarrow (((\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2) \vee (\psi_3 \rightarrow \psi_2))$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = 0 = V(\psi_2) = V(\psi_3) = 0$

   (m) $V \not\models (\psi_1 \vee (\neg\psi_3)) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1) \wedge ((\neg\psi_3) \rightarrow \psi_2) \wedge (\neg\psi_1)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = 0 = V(\psi_2) = V(\psi_3) = 0$

   (n) $V \not\models ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_1) \rightarrow \psi_1$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = 0$

   (o) $V \not\models ((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge ((\neg\psi_1) \rightarrow (\neg\psi_2))) \rightarrow (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$
   em que a valoração V é tal que $V(\psi_1) = 0$ e $V(\psi_2) = 1$

3. Para cada uma das fórmulas seguintes identifique, sempre que possível, uma valoração que satisfaça a fórmula e uma valoração que não satisfaça a fórmula (ψ_1, ψ_2 e ψ_3 são símbolos proposicionais).

   (a) $\psi_1 \rightarrow ((\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2)$

   (b) $(\neg\psi_1) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$

(c) $((\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2) \wedge (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$

(d) $((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow \psi_1) \rightarrow \psi_1$

(e) $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \rightarrow (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

(f) $((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_1$

(g) $((\psi_1 \rightarrow \psi_2) \wedge (\neg\psi_1)) \rightarrow (\neg\psi_2)$

(h) $(\psi_1 \rightarrow \psi_2) \vee (\psi_2 \rightarrow \psi_1)$

(i) $(\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge (\psi_1 \rightarrow \psi_3) \wedge (\psi_3 \rightarrow (\neg\psi_2))$

(j) $(\psi_1 \vee (\neg\psi_3)) \wedge (\psi_2 \rightarrow \psi_1) \wedge ((\neg\psi_3) \rightarrow \psi_2) \wedge (\neg\psi_1)$

(k) $((\neg\psi_1) \vee \psi_2) \rightarrow (((\neg\psi_1) \rightarrow \psi_2) \vee (\psi_3 \rightarrow \psi_2))$

(l) $((\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow (\neg\psi_3)) \rightarrow ((\psi_2 \rightarrow (\neg\psi_3)) \vee (\psi_1 \rightarrow (\neg\psi_3)))$

4. Verifique semanticamente se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, onde ψ_1, ψ_2, e ψ_3 designam fórmulas arbitrárias. Para as afirmações que são falsas, construa contra-exemplos apropriados, considerando, nesse caso, que ψ_1, ψ_2, e ψ_3 são símbolos proposicionais. Ainda para as afirmações que são falsas, verifique se a fórmula envolvida é possível ou contraditória.

   (a) i. $\models \psi_1 \vee (\neg\psi_1)$

   ii. $\models \psi_1 \wedge (\neg\psi_1)$

   iii. $\models \neg(\psi_1 \wedge (\neg\psi_1))$

   iv. $\models \neg(\psi_1 \vee (\neg\psi_1))$

   (b) i. $\models (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow (\psi_2 \wedge \psi_1)$

   ii. $\models (\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow (\psi_2 \vee \psi_1)$

   (c) i. $\models (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$

   ii. $\models (\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2)$

   (d) i. $\models \psi_1 \rightarrow (\neg(\neg\psi_1))$

   ii. $\models (\neg(\neg\psi_1)) \rightarrow \psi_1$

   iii. $\models (\neg(\neg\psi_1)) \leftrightarrow \psi_1$

   (e) i. $\models \psi_1 \rightarrow (\psi_1 \vee \psi_2)$

   ii. $\models (\psi_1 \vee \psi_2) \rightarrow \psi_1$

   iii. $\models \psi_1 \rightarrow (\psi_1 \wedge \psi_2)$

   iv. $\models (\psi_1 \wedge \psi_2) \rightarrow \psi_1$

   (f) i. $\models (\neg\psi_1) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$

   ii. $\models \psi_1 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$

   iii. $\models \psi_2 \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$

   iv. $\models (\neg\psi_2) \rightarrow (\psi_1 \rightarrow \psi_2)$

(g) i. $\models (\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_2 \to \psi_1)$

ii. $\models (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1))$

iii. $\models ((\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)) \to (\psi_1 \to \psi_2)$

iv. $\models ((\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)) \leftrightarrow (\psi_1 \to \psi_2)$

(h) i. $\models (\psi_1 \to \psi_2) \to ((\neg\psi_1) \vee \psi_2)$

ii. $\models ((\neg\psi_1) \vee \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_2)$

iii. $\models (\neg(\psi_1 \to \psi_2)) \to (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$

iv. $\models (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2)) \to (\neg(\psi_1 \to \psi_2))$

v. $\models (\neg(\psi_1 \to \psi_2)) \to (\psi_2 \to \psi_1)$

(i) i. $\models (\neg(\psi_1 \wedge \psi_2)) \to ((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_2))$

ii. $\models ((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_2)) \to (\neg(\psi_1 \wedge \psi_2))$

iii. $\models (\neg(\psi_1 \vee \psi_2)) \to ((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2))$

iv. $\models ((\neg\psi_1) \wedge (\neg\psi_2)) \to (\neg(\psi_1 \vee \psi_2))$

(j) i. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge \psi_2) \to \psi_1$

ii. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\neg\psi_2)) \to (\neg\psi_1)$

iii. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge \psi_1) \to \psi_2$

iv. $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\neg\psi_1)) \to (\neg\psi_2)$

(k) i. $\models ((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \psi_3) \to ((\psi_1 \vee \psi_3) \wedge ((\psi_2 \vee \psi_3)))$

ii. $\models ((\psi_1 \vee \psi_3) \wedge (\psi_2 \vee \psi_3)) \to ((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \psi_3)$

iii. $\models ((\psi_1 \vee \psi_3) \wedge (\psi_2 \vee \psi_3)) \leftrightarrow ((\psi_1 \wedge \psi_2) \vee \psi_3)$

iv. $\models ((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge \psi_3) \to ((\psi_1 \wedge \psi_3) \vee (\psi_2 \wedge \psi_3))$

v. $\models ((\psi_1 \wedge \psi_3) \vee ((\psi_2 \wedge \psi_3))) \to ((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge \psi_3)$

vi. $\models ((\psi_1 \wedge \psi_3) \vee ((\psi_2 \wedge \psi_3))) \leftrightarrow ((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge \psi_3)$

(l) $\models (((\neg\psi_1) \vee \psi_1) \to \psi_2) \to \psi_2$

(m) $\models ((\neg\psi_1) \to \psi_2) \wedge (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$

(n) $\models (\psi_1 \wedge \psi_2) \wedge (\psi_1 \to \psi_3) \wedge (\psi_3 \to (\neg\psi_2))$

(o) $\models (\psi_1 \vee (\neg\psi_3)) \wedge (\psi_2 \to \psi_1) \wedge ((\neg\psi_3) \to \psi_2) \wedge (\neg\psi_1)$

(p) $\models \psi_1 \to ((\neg\psi_1) \to \psi_2)$

(q) $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_1) \to \psi_1$

(r) $\models \psi_1 \to (\psi_2 \to (\neg\psi_2 \to \psi_1))$

(s) $\models (\psi_1 \to \psi_2) \vee (\psi_2 \to \psi_1)$

(t) $\models (\psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)) \to ((\psi_1 \to \psi_2) \to (\psi_1 \to \psi_3))$

(u) $\models ((\neg\psi_1) \vee \psi_2) \to (((\neg\psi_1) \to \psi_2) \vee (\psi_3 \to \psi_2))$

(v) $\models ((\psi_1 \vee \psi_2) \to (\neg\psi_3)) \to ((\psi_2 \to (\neg\psi_3)) \vee (\psi_1 \to (\neg\psi_3)))$

(w) $\models ((\psi_1 \to \psi_2) \wedge \to ((\neg\psi_1) \to (\neg\psi_2))) \to (\psi_1 \leftrightarrow \psi_2)$

5. Verifique semanticamente se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, onde ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_6 designam fórmulas arbitrárias. Para as afirmações que são falsas, construa contra-exemplos apropriados, considerando, nesse caso, que ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_6 são símbolos proposicionais.

   (a) i. $\{\psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)\} \models \psi_1 \to \psi_3$

   ii. $\{\psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)\} \models \psi_1 \to \psi_3$

   (b) i. $\{\psi_1 \to \psi_2\} \models \psi_1 \to (\psi_2 \wedge \psi_3)$

   ii. $\{\psi_1 \to \psi_2\} \models \psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)$

   (c) i. $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3\} \models \psi_1 \to \psi_3$

   ii. $\{(\psi_1 \vee \psi_2) \to \psi_3\} \models \psi_1 \to \psi_3$

   (d) $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3\} \models \psi_1 \to (\psi_2 \to \psi_3)$

   (e) $\{\psi_1 \to \psi_2,\ \ \psi_2 \to \psi_3\} \models \psi_1 \to \psi_3$

   (f) $\{\psi_1 \to \psi_3,\ \ \psi_2 \to \psi_3\} \models (\psi_1 \vee \psi_2) \to \psi_3$

   (g) $\{\psi_1 \to \psi_2,\ \ (\neg\psi_1) \to \psi_2\} \models \psi_2$

   (h) $\{\psi_1, \neg\psi_1\} \models \psi_2$

   (i) $\{\psi_1 \vee (\psi_4 \wedge \psi_2)\} \models ((\neg\psi_2) \to \psi_1) \wedge (\psi_1 \vee \psi_4)$

   (j) $\{(\psi_1 \to \psi_2) \vee \psi_4\} \models ((\neg\psi_1) \to \psi_2) \vee (\psi_4 \to \psi_2)$

   (k) $\{\psi_3,\ \ \psi_2 \vee (\psi_3 \to \psi_4)\} \models (\neg(\psi_3 \wedge \psi_4)) \to \psi_2$

   (l) $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3,\ \ \neg((\neg\psi_2) \vee \psi_3)\} \models \neg\psi_1$

   (m) $\{(\psi_1 \to \psi_2) \vee (\psi_3 \to \psi_4)\} \models (\psi_1 \to \psi_4) \vee (\psi_3 \to \psi_2)$

   (n) $\{(\psi_1 \to \psi_2) \vee (\psi_3 \to \psi_2)\} \models (\neg\psi_1) \to \psi_2$

   (o) $\{\psi_1 \to (\psi_2 \vee \psi_3)\} \models (\neg\psi_3) \to (\psi_2 \to (\neg\psi_1))$

   (p) $\{(\psi_3 \wedge \psi_4) \to \psi_1,\ \ \psi_2 \to \psi_3\} \models \psi_4 \to (\psi_2 \to \psi_1)$

   (q) $\{\psi_1 \to \psi_2,\ \ \psi_3 \to \psi_4,\ \ \psi_2 \vee \psi_4\} \models \psi_1 \vee \psi_3$

   (r) $\{\psi_1 \to (\psi_3 \wedge \psi_4),\ \ (\psi_2 \vee \psi_3) \to \psi_4\} \models \psi_4 \to \psi_1$

   (s) $\{(\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_3,\ \ \psi_4 \to (\neg\psi_1)),\ \ \psi_5,\ \ \neg\psi_4,\ \ \psi_5 \to \psi_2\} \models \psi_3$

   (t) $\{\psi_1,\ \ \psi_2 \to \psi_3,\ \ \neg(\psi_1 \wedge \psi_3)\} \models \neg\psi_2$

   (u) $\{(\neg\psi_1) \to \psi_2\} \models (((\neg\psi_1) \wedge \psi_2) \to (\neg\psi_1)) \wedge ((\neg\psi_1) \to ((\neg\psi_1) \wedge \psi_2))$

   (v) $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3,\ \psi_2 \wedge (\neg\psi_4)\} \models (\psi_3 \to \psi_4) \to (\neg\psi_1)$

   (w) $\{\psi_1 \to (\neg\psi_2)\} \models ((\neg\psi_3) \vee \psi_1) \to (\neg\psi_2)$

   (x) $\{(\neg\psi_1) \to \psi_2,\ \psi_1 \to (\neg\psi_5),\ \psi_3 \to (\psi_4 \vee \psi_5),\ \psi_4 \to (\neg\psi_3)\}$ $\models \psi_3 \to \psi_2$

   (y) $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3,\ \psi_4 \wedge (\neg\psi_5),\ (\neg\psi_5) \wedge ((\neg(\psi_5 \vee \psi_1)) \to \psi_6),\ \psi_2 \wedge (\neg\psi_3)\}$ $\models \psi_6$

(z) i. $\{\psi_1 \leftrightarrow \psi_2\} \models (\psi_1 \wedge \psi_3) \leftrightarrow (\psi_2 \wedge \psi_3)$

ii. $\{\neg(\psi_2 \vee (\neg\psi_3)) \leftrightarrow (\neg\psi_4),\ \psi_4\} \models \psi_3 \rightarrow (\psi_2 \vee \psi_1)$

6. Sejam P, Q e S símbolos proposicionais, f um símbolo de função e a, b símbolos de constante. Mostre que

(a) $\mathbb{M}, \rho \models P(x) \wedge Q(y)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é ímpar e $\rho(x) = 2$, $\rho(y) = 5$

(b) $\mathbb{M}, \rho \models P(a) \wedge Q(b)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é ímpar, $a_{\mathbb{M}} = 2$, $a_{\mathbb{M}} = 5$ e ρ é uma qualquer atribuição

(c) $\mathbb{M}, \rho \models P(f(a)) \rightarrow P(a)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é positivo, $f_{\mathbb{M}}(n) = n^2$, $a_{\mathbb{M}} = 3$ e ρ é uma qualquer atribuição

(d) $\mathbb{M}, \rho \not\models P(f(a)) \rightarrow P(a)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é positivo, $f_{\mathbb{M}}(n) = n^2$, $a_{\mathbb{M}} = -3$ e ρ é uma qualquer atribuição

(e) $\mathbb{M}, \rho \not\models S(x, y)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ com $S_{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ se e só se m é maior ou igual a n, $\rho(x) = -2$, $\rho(y) = 0$

(f) $\mathbb{M}, \rho \models \exists x S(x, y)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ com $S_{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ se e só se m é maior ou igual a n, $\rho(x) = -2$, $\rho(y) = 0$

(g) $\mathbb{M}, \rho \not\models \forall x S(x, y)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ com $S_{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ se e só se m é maior ou igual a n, $\rho(x) = 4$, $\rho(y) = 0$

(h) $\mathbb{M}, \rho \models \forall x S(x, y)$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $S_{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ se e só se m é maior ou igual a n, $\rho(x) = 4$, $\rho(y) = 0$

(i) $\mathbb{M}, \rho \models \forall x(\exists y S(x, y))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{Z}, I)$ com $S_{\mathbb{M}}(m, n) = 1$ se e só se m é maior ou igual a n e $\rho(x) = 3$, $\rho(y) = 10$

(j) $\mathbb{M}, \rho \models P(a) \rightarrow (\forall x P(x))$
em que $\mathbb{M} = (\{8\}, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $a_{\mathbb{M}} = 8$ e ρ a única atribuição possível

(k) $\mathbb{M}, \rho \models (\exists y P(y)) \rightarrow (\forall x P(x))$
em que $\mathbb{M} = (\{8\}, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $a_{\mathbb{M}} = 8$ e ρ a única atribuição possível

(l) $\mathbb{M}, \rho \models (\exists x P(x)) \rightarrow (\exists y P(y))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é primo, $a_{\mathbb{M}} = 8$ e $\rho(x) = 3$, $\rho(y) = 10$

(m) $\mathbb{M}, \rho \models (\forall x(P(x) \vee Q(x))) \to (\exists y Q(y))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é ímpar e $\rho(x) = 2$, $\rho(y) = 3$

(n) $\mathbb{M}, \rho \models (\forall x(P(x) \vee Q(x))) \to (\exists y Q(y))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é ímpar e $\rho(x) = 5$, $\rho(y) = 4$

(o) $\mathbb{M}, \rho \models (\forall x(P(x) \vee Q(x))) \to (\exists x Q(x))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é ímpar, e ρ é uma atribuição qualquer do conjunto das variáveis em $\mathbb{N}_0$

(p) $\mathbb{M}, \rho \not\models (\forall x(P(x) \vee Q(x))) \to (\exists x Q(x))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é um número positivo ou nulo, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é um número negativo, e ρ é uma atribuição qualquer do conjunto das variáveis em $\mathbb{N}_0$

(q) $\mathbb{M}, \rho \not\models (\forall x(P(x) \vee Q(x))) \to ((\forall y P(y)) \vee (\forall z Q(z)))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é par, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é ímpar, e $\rho(x) = 2$, $\rho(y) = 2$ e $\rho(z) = 3$

(r) $\mathbb{M}, \rho \models ((\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))) \to (\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é primo, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é múltiplo de 3, e ρ é uma atribuição qualquer do conjunto das variáveis em $\mathbb{N}_0$

(s) $\mathbb{M}, \rho \not\models ((\exists x P(x)) \wedge (\exists x Q(x))) \to (\exists x(P(x) \wedge Q(x)))$
em que $\mathbb{M} = (\mathbb{N}_0, I)$ com $P_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é primo, $Q_{\mathbb{M}}(n) = 1$ se e só se n é múltiplo de 9, e ρ é uma atribuição qualquer do conjunto das variáveis em $\mathbb{N}_0$

7. Para cada uma das fórmulas seguintes identifique, sempre que possível, uma interpretação e atribuição que satisfaçam a fórmula e uma interpretação e atribuição que não satisfaçam a fórmula (P, Q, R e S são símbolos de predicado, a é um símbolo de constante, x e y são variáveis e f é um símbolo de função).

   (a) $P(a) \to P(f(a))$
   (b) $P(a) \to (\neg P(f(a)))$
   (c) $P(x) \to ((\neg P(f(x))) \wedge P(f(f(x))))$
   (d) $(P(x) \vee Q(x)) \to R(x)$
   (e) $P(x) \to (\forall x P(x))$
   (f) $P(x) \to (\exists x P(x))$
   (g) $P(y) \to (\exists x P(x))$
   (h) $P(a) \to (\exists x P(x))$
   (i) $(\exists x P(x)) \to P(x)$
   (j) $\forall x(S(x, f(x)))$
   (k) $(\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, P(x))$

(l) $(\exists x\, P(x)) \to (\forall x\, P(x))$

(m) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$

(n) $\forall x((\neg P(x)) \to Q(x))$

(o) $\forall x(R(x) \to R(f(f(x))))$

(p) $(\exists x\, P(x)) \to (\forall x\, P(x))$

(q) $\forall x(\exists y S(x,y))$

(r) $\exists x(\forall y S(x,y))$

(s) $S(x,a) \to (\forall x(\exists y S(x,y)))$

(t) $(\forall x(\forall y S(x,y))) \to (\forall x(\forall y S(y,x)))$

(u) $(\forall x(\forall y S(x,y))) \to (\forall y(\forall x S(x,y)))$

(v) $(\forall x(\forall y S(x,y))) \to (\forall y(\forall x S(y,x)))$

(w) $(\forall x(\exists y S(x,y))) \to (\exists x(\forall y S(x,y)))$

(x) $(\exists x(\forall y S(x,y))) \to (\forall x(\exists y S(x,y)))$

8. Verifique semanticamente se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, onde P, Q, R e S designam símbolos de predicado, y é uma variável e f é um símbolo de função e a é um símbolo de constante. Para as afirmações que são falsas construa contra-exemplos apropriados e verifique se a fórmula envolvida é possível ou contraditória.

(a) i. $\models (\forall x\ \psi) \to \psi$

ii. $\models \psi \to (\forall x\ \psi)$

onde ψ é uma fórmula na qual x não ocorre livre.

(b) i. $\models P(y) \to (\forall x\, P(x))$

ii. $\models P(y) \to (\exists x\, P(x))$

(c) i. $\models (\forall x\, P(x)) \to P(f(a))$

ii. $\models (\exists x\, P(x)) \to P(f(a))$

(d) i. $\models (\forall x\, P(x)) \to (\forall y\, P(y))$

ii. $\models (\exists x\, P(x)) \to (\exists y\, P(y))$

(e) i. $\models (\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, P(x))$

ii. $\models (\exists x\, P(x)) \to (\forall x\, P(x))$

(f) i. $\models (\forall x\, P(x)) \to (\neg(\exists x\, (\neg P(x))))$

ii. $\models (\neg(\exists x\, (\neg P(x)))) \to (\forall x\, P(x))$

iii. $\models (\forall x\, P(x)) \leftrightarrow (\neg(\exists x\, (\neg P(x))))$

(g) i. $\models (\exists x\, P(x)) \to (\neg(\forall x\, (\neg P(x))))$

ii. $\models (\neg(\forall x\, (\neg P(x)))) \to (\exists x\, P(x))$

iii. $\models (\exists x\, P(x)) \leftrightarrow (\neg(\forall x\, (\neg P(x))))$

(h) i. $\models ((\forall x\, Q(x)) \rightarrow (\forall x\, R(x))) \rightarrow (\forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x)))$

ii. $\models (\forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow ((\forall x\, Q(x)) \rightarrow (\forall x\, R(x)))$

(i) i. $\models ((\exists x\, Q(x)) \rightarrow (\exists x\, R(x))) \rightarrow (\exists\, (Q(x) \rightarrow R(x)))$

ii. $\models (\exists x\, (Q(x) \rightarrow R(x))) \rightarrow ((\exists x\, Q(x)) \rightarrow (\exists x\, R(x)))$

(j) i. $\models ((\forall x\, Q(x)) \vee (\forall x\, R(x))) \rightarrow (\forall\, (Q(x) \vee R(x)))$

ii. $\models (\forall x\, (Q(x) \vee R(x))) \rightarrow ((\forall x\, Q(x)) \vee (\forall x\, R(x)))$

(k) i. $\models ((\exists x\, Q(x)) \vee (\exists x\, R(x))) \rightarrow (\exists\, (Q(x) \vee R(x)))$

ii. $\models (\exists x\, (Q(x) \vee R(x))) \rightarrow ((\exists x\, Q(x)) \vee (\exists x\, R(x)))$

(l) i. $\models ((\forall x\, Q(x)) \wedge (\forall x\, R(x))) \rightarrow (\forall\, (Q(x) \wedge R(x)))$

ii. $\models (\forall x\, (Q(x) \wedge R(x))) \rightarrow ((\forall x\, Q(x)) \wedge (\forall x\, R(x)))$

(m) i. $\models ((\exists x\, Q(x)) \wedge (\exists x\, R(x))) \rightarrow (\exists\, (Q(x) \wedge R(x)))$

ii. $\models (\exists x\, (Q(x) \wedge R(x))) \rightarrow ((\exists x\, Q(x)) \wedge (\exists x\, R(x)))$

(n) i. $\models (\forall x(\forall y\, S(x,y))) \rightarrow (\forall y(\forall x\, S(x,y)))$

ii. $\models (\exists x(\exists y\, S(x,y))) \rightarrow (\exists y(\exists x\, S(x,y)))$

(o) i. $\models (\forall x(\forall y\, S(x,y))) \rightarrow (\forall x(\forall y\, S(y,x)))$

ii. $\models (\exists x(\exists y\, S(x,y))) \rightarrow (\exists x(\exists y\, S(y,x)))$

(p) i. $\models (\forall x(\forall y\, S(x,y))) \rightarrow (\forall y(\forall x\, S(y,x)))$

ii. $\models (\exists x(\exists y\, S(x,y))) \rightarrow (\exists y(\exists x\, S(y,x)))$

(q) i. $\models (\exists x(\forall y\, S(x,y))) \rightarrow (\forall y(\exists x\, S(x,y)))$

ii. $\models (\forall y(\exists x\, S(x,y))) \rightarrow (\exists x(\forall y\, S(x,y)))$

(r) $\models \exists x(P(x) \rightarrow (\forall x\, P(x)))$

(s) $\models \forall x(P(x) \rightarrow (\forall x\, P(x)))$

(t) $\models \exists y\, ((\forall x\, P(x)) \rightarrow P(y))$

(u) $\models ((\exists x\, P(x)) \rightarrow (\forall x\, P(x))) \rightarrow (\forall x\, P(x))$

(v) $\models (\forall x\ (P(x) \rightarrow P(f(x)))) \rightarrow (P(a) \rightarrow P(f(f(a))))$

9. Verifique semanticamente se são verdadeiras ou falsas as afirmações seguintes, onde P, Q, R e S designam símbolos de predicado, y é uma variável e f é um símbolo de função e a é um símbolo de constante. Para as afirmações que são falsas construa contra-exemplos apropriados.

(a) i. $\{Q(x)\} \models \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$

ii. $\{\neg P(x),\ P(y)\} \models \neg(\forall x P(x))$

iii. $\{P(x) \rightarrow Q(y)\} \models (\exists x P(x)) \rightarrow (\exists x Q(x))$

(b) i. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ P(a)\} \models Q(a)$

ii. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \neg P(a)\} \models \neg Q(a)$

iii. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \neg P(f(a))\} \models \neg Q(f(a))$

iv. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \neg Q(a)\} \models \neg P(a)$

(c) i. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ P(a)\} \models Q(a)$

ii. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ P(x)\} \models Q(x)$

(d) i. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$

ii. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \exists x(\neg Q(x))\} \models \exists x(\neg P(x))$

iii. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \exists x(\neg P(x))\} \models \exists x(\neg Q(x))$

(e) i. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \forall x P(x)\} \models \exists x Q(x)$

ii. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \exists x(\neg Q(x))\} \models \exists x(\neg P(x))$

iii. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)),\ \ \forall x(\neg Q(x))\} \models \neg(\exists x P(x))$

(f) i. $\{\exists x(P(x) \vee Q(x)),\ \ \forall x(\neg P(x))\} \models \exists x(\neg Q(x))$

ii. $\{\exists x(P(x) \vee Q(x)),\ \ \exists x(\neg P(x))\} \models \exists x(\neg Q(x))$

(g) i. $\{\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ \ \exists x(\neg P(x))\} \models \exists x Q(x)$

ii. $\{\forall x(P(x) \vee Q(x)),\ \ \exists x P(x)\} \models \exists x Q(x)$

(h) i. $\{\exists x(P(x) \rightarrow Q(x)))\} \models (\forall x\ P(x)) \rightarrow (\exists x\, Q(x))$

ii. $\{(\forall x\ P(x)) \rightarrow (\exists x\, Q(x))\} \models \exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$

(i) i. $\{\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\} \models (\exists x\ P(x)) \rightarrow (\forall x\, Q(x))$

ii. $\{(\exists x\ P(x)) \rightarrow (\forall x\, Q(x))\} \models \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

(j) i. $\{(\forall x\, P(x)) \rightarrow R(a)\} \models \exists x(P(x) \rightarrow R(a))$

ii. $\{\exists x(P(x) \rightarrow R(a))\} \models (\forall x\, P(x)) \rightarrow R(a)$

(k) i. $\{(\exists x\, P(x)) \rightarrow R(a)\} \models \forall x(P(x) \rightarrow R(a))$

ii. $\{\forall x(P(x) \rightarrow R(a))\} \models (\exists x\, P(x)) \rightarrow R(a)$

(l) $\{\exists x\, Q(x),\ \forall x\, R(x)\} \models \forall x\,(R(x) \rightarrow Q(x))$

(m) $\{\exists x\, P(x),\ \ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))\} \models \exists y\, Q(y)$

(n) $\{\forall x(P(x) \rightarrow (\neg(\exists y\ Q(y))))\} \models \neg(\exists x(P(x) \wedge (\exists y\ Q(y))))$

(o) $\{\exists x(\neg(\exists y\, R(x,y)))\} \models \neg\exists x \forall y(\neg R(x,y))$

(p) $\{\forall x(\forall y(R(y) \rightarrow Q(x)))\} \models (\exists y R(y)) \rightarrow (\forall x Q(x))$

(q) $\{\exists x\, P(x),\ \ \forall x(\forall y(P(x) \rightarrow Q(y)))\} \models \forall y\, Q(y)$

(r) $\{\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y R(x,y)))\} \models \exists x\,(P(x) \wedge (\forall y \neg R(x,y)))$

(s) $\{\forall x(Q(x) \rightarrow (\forall y\, R(y)))\} \models (\exists y(\neg R(y))) \rightarrow (\forall x\,(\neg Q(x)))$

(t) $\{\forall x((\exists y\, R(y)) \to P(x))\} \models \forall x((\forall y\ (\neg R(y))) \vee P(x))$
(u) $\{\forall x((\neg P(x) \wedge (\exists y\ Q(y)))\} \models \forall x(\exists y((\neg P(x)) \wedge Q(y)))$
(v) $\{\forall x(\exists y(P(x) \to R(x,y)))\} \models \exists x\ (P(x) \wedge (\neg(\exists y\, R(x,y))))$

10. Considere os exercícios 9j e 9k anteriores. As conclusões obtidas mantêm-se se se substituir $R(a)$ por uma outra fórmula arbitrária? Justifique.

11. Considere o seguinte problema:

    Em cima de uma mesa estão 3 caixas fechadas. Uma tem um diamante dentro e as outras estão vazias. Na tampa de cada caixa está escrita um frase. Uma das 3 frases é verdadeira e as outras são falsas. A frase da caixa A é “O diamante não está aqui”. A frase da caixa B é “O diamante não está aqui”. A frase da caixa C é “O diamante está na caixa B ”. Onde está o diamante?

    Especifique este problema usando fórmulas proposicionais.

12. Uma ilha do Pacífico é habitada por dois tipos de indivíduos: os *Honestos* e os *Mentirosos*. Tudo o que os *Honestos* dizem é verdadeiro e tudo o que os *Mentirosos* dizem é falso.

    (a) Um visitante chega à ilha e conversa com os habitantes.

    i. Encontra um primeiro casal e pergunta-lhes: “Vocês são *Honestos* ou *Mentirosos*?” O marido responde: “Somos ambos *Mentirosos*”.
    ii. A um outro casal pergunta: “Vocês são ambos *Mentirosos*?” O marido responde: “Pelo menos um de nós é”.
    iii. Um casal aproxima-se do visitante e o marido diz:“Se eu for *Honesto* então a minha mulher também é”.
    iv. Um novo casal aproxima-se do visitante e o marido diz: “Eu e a minha mulher somos ambos do mesmo tipo”.

    Será possível determinar em cada caso a que tipo pertence cada um dos elementos do casal?
    Especifique os problemas anteriores usando fórmulas proposicionais.

    (b) Três habitantes A, B e C falam com um visitante.

    i. A diz “B e C são ambos *Honestos*”; B diz “A é *Mentiroso* e C é *Honesto*”.
    ii. A diz “B é *Mentiroso*”; B diz “A e C são de tipos diferentes”.

    Em cada caso, a que tipo pertence cada um? Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

    (c) Um visitante chega à ilha e deseja saber se nela existe uma agência de aluguer de automóveis. Pede informações a dois habitantes A e B.

i. A diz "Se algum de nós é *Honesto* então existe uma agência de aluguer de automóveis"; B diz "Isso é verdade".
ii. A diz "Se B é *Honesto* então não existe uma agência de aluguer de automóveis"; B diz "Se A é *Mentiroso* então não existe uma agência de aluguer de automóveis".
iii. A diz "Se algum de nós é *Honesto* então existe uma agência de aluguer de automóveis"; B diz "Se algum de nós é *Mentiroso* então existe uma agência de aluguer de automóveis".
iv. A diz "Se eu sou *Honesto* e B é *Mentiroso* então existe uma agência de aluguer de automóveis"; B diz "Isso não é verdade".

Será possível determinar em cada situação se existe ou não uma agência de aluguer de automóveis?

Especifique os problemas anteriores usando fórmulas proposicionais.

13. Uma outra ilha do Pacífico é habitada por duas tribos: os *Tupi* e os *Supi*. Os visitantes da ilha nunca conseguem distinguir os *Tupi* dos *Supi*. Também têm dificuldade em distinguir os homens das mulheres da primeira tribo, pois são muito semelhantes e vestem-se da mesma maneira. O mesmo acontece com a segunda tribo. Uma outra característica dos habitantes da ilha é que os homens *Tupi* mentem sempre tal como as mulheres *Supi*. Por outro lado, os homens *Supi* dizem sempre a verdade, o mesmo acontecendo com as mulheres *Tupi*.

(a) Que pergunta, cuja resposta só poderá ser "sim" ou "não", pode um visitante fazer a um habitante da ilha de forma a ficar a saber se é homem ou mulher? E se for para ficar a saber se é *Tupi* ou *Supi*?

Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

(b) Que afirmação pode um habitante fazer que permita a um visitante ficar a saber que é uma mulher *Supi*? E ficar a saber que é uma mulher *Tupi*?

Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

(c) Dois habitantes A e B falam com um visitante: A diz "B é *Tupi*"; B diz "A é *Supi*"; A diz "B é homem"; B diz "A é mulher".

De que tribo e de que sexo são os habitantes A e B? Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

(d) Um casal da ilha fala com um visitante: diz um deles "Eu sou *Supi*"; o outro diz "Isso não é verdade".

São de tribos diferentes ou não? Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

(e) Um casal da ilha fala com um visitante: diz um deles "Somos ambos *Tupi*"; o outro diz "Isso não é verdade".

Qual deles é o marido? Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

(f) Um visitante fala com dois habitantes A e B: A diz "B é *Supi*"; B diz "Somos ambos *Supi*".

Sabendo que um era um homem e outro uma mulher, qual deles é o homem e qual é a mulher e de que tribo é cada um? Especifique o problema usando fórmulas proposicionais.

14. O Tagus e o Alameda são restaurantes muito concorridos na ilha dos *Honestos* e dos *Mentirosos*.

    (a) Todos os *Mentirosos* gostam do Tagus.

    (b) Há *Honestos* que não gostam do Tagus.

    (c) Hoje estavam no Alameda apenas *Honestos*.

    (d) Hoje no Alameda estavam todos os *Mentirosos*.

    (e) Hoje no Alameda todas as contas foram pagas por *Honestos*.

    (f) Hoje houve no Tagus um *Mentiroso* que pagou todas as contas.

    (g) Todos os *Honestos* que gostam do Tagus também gostam do Alameda, mas há um *Honesto* que não gosta do Tagus. Assim, há um *Honesto* que também não gosta do Alameda.

    (h) Todos os *Mentirosos* já foram pelo menos uma vez ao Tagus ou ao Alameda. Todos os habitantes que foram ao Tagus também já foram ao Alameda. Todos os *Mentirosos* que vão a primeira vez ao Alameda voltam lá de novo. Qualquer *Mentiroso* já foi duas vezes ao Alameda.

    Use fórmulas de primeira ordem para representar as afirmações anteriores.

15. Uma relação binária que é transitiva e irreflexiva é também anti-simétrica.

    Use fórmulas de primeira ordem para representar a afirmação anterior. Uma relação é irreflexiva se nenhum elemento está em relação consigo próprio. Uma relação é anti-simétrica se verifica a seguinte condição: se um elemento a está em relação com um elemento b então b não está em relação com a.

16. Numa relação de equivalência se um elemento a está em relação com um elemento b então a está também em relação com todos os elementos que estão em relação com b.

    Use fórmulas de primeira ordem para representar a afirmação anterior. Uma relação de equivalência é uma relação binária transitiva, simétrica e reflexiva.

17. Uma relação binária que é simétrica e euclideana é também transitiva.

    Use fórmulas de primeira ordem para representar a afirmação anterior. Uma relação é euclideana se verifica a seguinte condição: se um elemento a está em relação com um elemento b e com um elemento c então b está em relação com c.

18. Se numa relação binária transitiva e simétrica cada elemento a está em relação com algum elemento b então essa relação é reflexiva.

    Use fórmulas de primeira ordem para representar a afirmação anterior.

19. Se numa relação binária simétrica e euclideana (ver 17) cada elemento a está em relação com algum elemento b então essa relação é reflexiva.

20. Toda a relação de equivalência (ver 16) é uma relação circular.

    Use fórmulas de primeira ordem para representar a afirmação anterior. Uma relação é circular se verifica a seguinte condição: se um elemento a está em relação com um elemento b e b está em relação com um elemento c então c está em relação com a.

21. Toda a relação que é reflexiva e circular (ver 20) é uma relação de equivalência (ver 16).

    Use fórmulas de primeira ordem para representar a afirmação anterior.

2 Sistema dedutivo $\mathcal{T}$

1. Considere os seguintes conjuntos de fórmulas em que ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4, ψ_5 e ψ_6 designam fórmulas arbitrárias.

   (a) $\{\psi_2 \to \psi_3,\ \psi_1 \wedge \psi_2,\ \neg\psi_3\}$

   (b) $\{(\psi_1 \to \psi_3) \wedge (\psi_2 \to \psi_3),\ \neg((\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3)\}$

   (c) $\{\psi_1 \vee \psi_2,\ \psi_1 \vee \psi_3,\ \neg(\psi_2 \vee \psi_3)\}$

   (d) $\{\psi_1 \wedge (\psi_2 \vee \psi_3),\ \neg(\psi_1 \wedge \psi_2),\ \neg(\psi_1 \wedge \psi_3)\}$

   (e) $\{\psi_1 \vee (\psi_2 \wedge \psi_3),\ \neg((\psi_1 \vee \psi_2) \wedge (\psi_1 \vee \psi_3))\}$

   (f) $\{\psi_1 \to \psi_2,\ (\neg\psi_3) \to (\neg\psi_2),\ \psi_3 \to (\neg\psi_4),\ \neg((\neg\psi_1) \vee (\neg\psi_4))\}$

   (g) $\{\psi_1 \to \psi_2,\ \neg\psi_2,\ \neg\psi_3,\ (\neg\psi_1) \to \psi_3,\ (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_3)\}$

   (h) $\{\psi_1 \to ((\neg\psi_2) \vee \psi_3),\ \neg\psi_3,\ (\neg\psi_2) \to (\neg\psi_1)\}$

   (i) $\{(\psi_1 \to \psi_2) \to \psi_3,\ \psi_4 \to (\neg\psi_1)),\ \psi_5,\ \neg\psi_4,\ \psi_5 \to \psi_2,\ \neg\psi_3\}$

   (j) $\{(\neg\psi_1) \to \psi_2,\ \psi_1 \to (\neg\psi_5),\ \psi_3 \to (\psi_4 \vee \psi_5),\ \psi_4 \to (\neg\psi_3),\ \neg(\psi_3 \to \psi_2)\}$

   (k) $\{(\psi_1 \wedge \psi_2) \to \psi_3,\ \psi_4 \wedge (\neg\psi_5),\ (\neg\psi_5) \wedge ((\neg(\psi_5 \vee \psi_1)) \to \psi_6),\ \psi_2 \wedge (\neg\psi_3),\ \neg\psi_6\}$

   1. Indique quais dos conjuntos anteriores são conjuntos confutados.
   2. Para cada conjunto confutado que encontrou em 1., diga o que pode concluir sobre as fórmulas envolvidas do ponto de vista da consequência semântica.
   3. Para cada conjunto não confutado suponha que $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ são símbolos proposicionais e use o *tableau* obtido para descrever uma interpretação que satisfaça o conjunto.

2. Considere o seguintes conjuntos onde P, Q, R e S designam símbolos de predicado.

   (a) $\{\neg((\forall x\, P(x)) \to (\exists x\, P(x)))\}$
   (b) $\{\neg(\exists y\, ((\forall x\, P(x)) \to P(y)))\}$
   (c) $\{\neg((\exists x\, Q(x)) \to (\neg(\forall x\, (\neg Q(x)))))\}$
   (d) $\{\forall x\, Q(x),\ \neg(\exists x\, \neg Q(x))\}$
   (e) $\{\exists y\, (P(y) \vee Q(y)),\ \ \forall x\, (\neg P(x)), \forall x\, (\neg Q(x))\}$
   (f) $\{\forall y\, (P(y) \vee Q(y)),\ \ \exists x\, (\neg P(x)),\ \ \forall y\, (R(y) \to (\neg P(y))),\ \neg(\exists x\, (\neg R(x)))\}$
   (g) $\{\forall y\, (P(y) \vee Q(y)),\ \ \exists x\, (\neg P(x)),\ \ \forall y\, (R(y) \to (\neg P(y))),\ \ \forall x\, R(x)\}$
   (h) $\{\forall x\, (P(x) \to (Q(x) \vee R(x))),\ \neg(\exists x\, (P(x) \wedge R(x))),\ \exists x\, (P(x) \wedge (\neg Q(x)))\}$
   (i) $\{(\forall x\, (P(x) \vee Q(x))) \to (\exists x\, R(x)), \forall x\, (R(x) \to Q(x)), \exists x\, (P(x) \wedge (\neg Q(x)))\}$
   (j) $\{\forall x\, (\neg S(x,x)),\ \exists x\, P(x),\ \forall x\, (\exists y\, S(x,y)),\ \forall x\, (P(x) \to (\exists x\, S(y,x)))\}$
   (k) $\{\forall x(P(x) \to (\exists y Q(y))),\ \neg(\forall x(\exists y(P(x) \to Q(y))))\}$
   (l) $\{\forall x(\exists y(P(x) \to Q(y))),\ \neg(\forall x(P(x) \to (\exists y Q(y))))\}$
   (m) $\{\forall x(\exists y\, (P(x) \to Q(y))),\ \neg(\exists y(\forall x\, (P(x) \to Q(y))))\}$
   (n) $\{\forall x(\forall y\, S(x,y)),\ \neg(\forall y(\forall x\, S(x,y)))\}$
   (o) $\{\exists x(\exists y\, S(x,y)),\ \neg(\exists y(\exists x\, S(x,y)))\}$
   (p) $\{\exists x(\neg(\exists y\, S(x,y))),\ \ \neg(\exists x \forall y(\neg S(x,y)))\}$
   (q) $\{\forall x(P(x) \to (\exists y S(x,y))),\ \ \exists x\, (P(x) \wedge (\forall y \neg S(x,y)))\}$
   (r) $\{\forall x(\exists y(P(x) \to S(x,y))),\ \ \exists x\ (P(x) \wedge (\neg(\exists y\, S(x,y))))\}$
   (s) $\{\forall x(\forall y(\forall z((S(x,y) \wedge S(y,z)) \to S(x,z)))),\ \ \forall x\, (\neg S(x,x)),$
   $\neg(\forall x(\forall y(S(x,y) \to (\neg S(y,x)))))\}$

   1. Indique quais dos conjuntos anteriores são conjuntos confutados.
   2. Para cada conjunto confutado que encontrou em 1., diga o que pode concluir sobre as fórmulas envolvidas do ponto de vista da consequência semântica.
   3. Sempre que consiga concluir que um conjunto não é confutado, use se possível o *tableau* obtido para construir uma interpretação que satisfaça o conjunto.

3. Use o sistema $\mathcal{T}$ para determinar se são verdadeiras ou falsas as afirmações apresentadas nos exercícios 4 e 5 da secção 1.

   No caso das afirmações falsas, suponha que os símbolos presentes nas fórmulas são símbolos proposicionais e use o *tableau* obtido para descrever um contra-exemplo apropriado.

4. Use o sistema $\mathcal{T}$ para determinar, sempre que possível, se são verdadeiras ou falsas as afirmações apresentadas nos exercícios 8 e 9 da secção 1.

   No caso das afirmações falsas, quando for possível, use o *tableau* obtido para descrever um contra-exemplo apropriado.

5. O conectivo $\leftrightarrow$ é definido por abreviatura da seguinte forma: $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2 =_{abv} (\psi_1 \to \psi_2) \wedge (\psi_2 \to \psi_1)$. Supondo que o conectivo $\leftrightarrow$ não é definido por abreviatura, estenda o sistema $\mathcal{T}$ com as regras apropriadas a este conectivo.

6. O conectivo $\oplus$ é definido por abreviatura da seguinte forma: $\psi_1 \oplus \psi_2 =_{abv} ((\neg\psi_1) \wedge \psi_2) \vee (\psi_1 \wedge (\neg\psi_2))$. Supondo que o conectivo $\oplus$ não é definido por abreviatura, estenda o sistema $\mathcal{T}$ com as regras apropriadas a este conectivo.

7. O conectivo $\mid$ é definido por abreviatura da seguinte forma: $\psi_1 \mid \psi_2 =_{abv} \neg(\psi_1 \wedge \psi_2)$. Supondo que o conectivo $\mid$ não é definido por abreviatura, estenda o sistema $\mathcal{T}$ com as regras apropriadas a este conectivo.

8. O conectivo $\downarrow$ é definido por abreviatura da seguinte forma: $\psi_1 \downarrow \psi_2 =_{abv} \neg(\psi_1 \vee \psi_2)$. Supondo que o conectivo $\downarrow$ não é definido por abreviatura, estenda o sistema $\mathcal{T}$ com as regras apropriadas a este conectivo.

9. Prove a correcção das regras do sistema $\mathcal{T}$.

10. Resolva o problema especificado no exercício 11 da secção 1 usando o sistema $\mathcal{T}$.

11. Resolva os problemas especificados no exercício 12 da secção 1 usando o sistema $\mathcal{T}$.

12. Resolva os problemas especificados no exercício 13 da secção 1 usando o sistema $\mathcal{T}$.

13. Usando o sistema $\mathcal{T}$, verifique se estão correctos os raciocínios descritos nos exercícios 14g e 14h da secção 1.

14. Usando o sistema $\mathcal{T}$, verifique se são verdadeiras as propriedades descritas nos exercícios 15, 16, 17, 18, 19, 20 e 21 da secção 1.

3 Sistema dedutivo $\mathcal{R}$

1. Traduza para a forma normal conjuntiva as seguintes fórmulas em que P, Q e R designam símbolos proposicionais.

   (a) $(P \vee (\neg R)) \vee (Q \wedge R)$
   (b) $((P \wedge (\neg R)) \vee Q) \vee (Q \wedge R)$
   (c) $P \to (R \vee Q)$
   (d) $((\neg P) \to (R \vee Q)) \wedge ((R \vee Q) \to (\neg P))$
   (e) $((R \wedge Q) \to Q))$

2. Traduza para a forma normal conjuntiva a fórmula de cada alínea do exercício 4, assumindo que ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 são símbolos proposicionais.

3. Traduza para a forma normal disjuntiva as seguintes fórmulas em que P, Q e R designam símbolos proposicionais.

   (a) $(P \vee (\neg R)) \vee (Q \wedge R)$
   (b) $((P \wedge (\neg R)) \vee Q) \vee (Q \wedge R)$
   (c) $P \rightarrow (R \vee Q)$
   (d) $((\neg P) \rightarrow (R \vee Q)) \wedge ((R \vee Q) \rightarrow (\neg P))$
   (e) $((R \wedge Q) \rightarrow Q))$

4. Traduza para a forma normal disjuntiva a fórmula de cada alínea do exercício 4, assumindo que ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 são símbolos proposicionais.

5. Usando o sistema $\mathcal{R}$ diga quais dos seguintes conjuntos são incoerentes. P, Q, R e S designam símbolos proposicionais.

   (a) $\{\neg P,\ \ P \vee (\neg Q),\ \ Q\}$
   (b) $\{P \vee Q,\ \ (\neg P) \vee (\neg Q),\ \ (\neg P) \vee Q\}$
   (c) $\{P \vee Q \vee R,\ \ P \vee (\neg R),\ \ \neg P,\ \ \neg Q\}$
   (d) $\{P \vee (\neg Q) \vee R,\ \ P \vee (\neg R),\ \ (\neg P) \vee Q\}$
   (e) $\{(\neg P) \vee (\neg Q) \vee R,\ \ P \vee (\neg R),\ \ (\neg P) \vee Q\}$
   (f) $\{P \vee (\neg Q) \vee R \vee (\neg S),\ \ P \vee (\neg R),\ \ (\neg P) \vee Q \vee (\neg S),\ \ S\}$
   (g) $\{P \vee Q \vee (\neg R),\ \ P \vee Q \vee R,\ \ P \vee (\neg Q),\ \ \neg P\}$
   (h) $\{P \vee (\neg Q) \vee R,\ \ Q \vee R,\ \ (\neg P) \vee R,\ \ Q \vee (\neg R),\ \ \neg Q\}$
   (i) $\{P \vee (\neg Q),\ \ P \vee R,\ \ (\neg Q) \vee R,\ \ (\neg P) \vee Q,\ \ (\neg R) \vee Q,\ \ (\neg P) \vee (\neg R)\}$

6. Para cada conjunto incoerente identificado no exercício 6, diga o que pode concluir sobre as fórmulas envolvidas do ponto de vista da consequência semântica.

7. Use o sistema $\mathcal{R}$ para determinar quais das seguintes afirmações são verdadeiras. P, Q, R, S e T designam símbolos proposicionais.

   (a) $\{P \rightarrow Q,\ \ (\neg Q) \vee R,\ \ (\neg R) \vee (R \rightarrow P),\ \ \neg R\} \models \neg P$
   (b) $\{(\neg P) \rightarrow Q,\ \ (\neg P) \vee R \vee S,\ \ (\neg R) \vee (S \wedge T),\ \ (T \wedge (\neg S)) \rightarrow (\neg R)\}$
   $\models (\neg S) \rightarrow Q$
   (c) $\{P \rightarrow Q,\ \ Q \rightarrow R,\ \ S \rightarrow R,\ \ R \vee S\} \models (\neg P) \vee R$
   (d) $\{(\neg P) \wedge ((\neg Q) \vee R),\ \ Q \wedge R,\ \ R \rightarrow S,\ \ S \vee (\neg P)\} \models \neg((\neg S) \wedge P)$
   (e) $\{R \rightarrow (P \vee Q),\ \ P \vee (((\neg R) \rightarrow Q) \wedge (\neg Q))\} \models P$
   (f) $\models ((\neg Q) \rightarrow P) \rightarrow (P \vee Q)$

8. Use o sistema $\mathcal{R}$ para determinar se são verdadeiras ou falsas as afirmações apresentadas nos exercícios 4 e 5 da secção 1, assumindo que ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 e ψ_5 são símbolos proposicionais.