Teste 3 - 2004/2005

Resolução

Grupo 1

1.a) Pretende-se saber se a fórmula $(P \to (Q \wedge R)) \to ((P \to Q) \wedge (P \to R))$ é teorema do sistema dedutivo $\mathcal{T}$. Para tal, por definição de teorema do sistema $\mathcal{T}$, há que verificar se

$$\neg((P \to (Q \wedge R)) \to ((P \to Q) \wedge (P \to R)))$$

é fórmula confutada, ou seja, há que verificar se existe um tableau fechado para o conjunto constituído por esta fórmula:

$$\dfrac{\neg((P \to (Q \wedge R)) \to ((P \to Q) \wedge (P \to R)))^{(1)}}{\dfrac{P \to (Q \wedge R)^{(2)},\ \neg((P \to Q) \wedge (P \to R))^{(3)}}{\dfrac{\neg P}{\dfrac{\neg(P \to Q)^{(5)}}{\begin{array}{c} P,\ \neg Q \\ \times \end{array}}\ \neg\to (5) \qquad \dfrac{\neg(P \to R)^{(6)}}{\begin{array}{c} P,\ \neg R \\ \times \end{array}}\ \neg\to (6)}\ \neg\wedge (3) \qquad \dfrac{Q \wedge R^{(4)}}{\dfrac{Q,\ R}{\dfrac{\neg(P \to Q)^{(7)}}{\begin{array}{c} P,\ \neg Q \\ \times \end{array}}\ \neg\to (7) \qquad \dfrac{\neg(P \to R)^{(8)}}{\begin{array}{c} P,\ \neg R \\ \times \end{array}}\ \neg\to (8)}\ \neg\wedge (3)}\ \wedge(4)}\ \to (2)}\ \neg\to (1)$$

Dado que existe um tableau fechado para o conjunto constituído pela fórmula

$$\neg((P \to (Q \wedge R)) \to ((P \to Q) \wedge (P \to R)))$$

tem-se que $\vdash_{\mathcal{T}}\ (P \to (Q \wedge R)) \to ((P \to Q) \wedge (P \to R))$.

1.b) Pretende-se saber se a fórmula $(\neg P) \to (S \to R)$ é derivável a partir da fórmula $((\neg P) \vee Q) \to R$ no sistema dedutivo $\mathcal{T}$. Para tal, por definição de derivação no sistema $\mathcal{T}$, há que verificar se o conjunto

$$\{((\neg P) \vee Q) \to R,\ \neg((\neg P) \to (S \to R))\}$$

é conjunto confutado, ou seja, há que verificar se existe um tableau fechado para este conjunto:

$$\begin{array}{cl}
((\neg P) \vee Q) \to R^{(1)},\ \neg((\neg P) \to (S \to R))^{(2)} & \\ \cline{1-1}
\neg P,\ \neg(S \to R)^{(3)} & \neg \to (2) \\ \cline{1-1}
S,\ \neg R & \neg \to (3) \\ \cline{1-1}
\begin{array}{clc}
\neg((\neg P) \vee Q)^{(4)} & & R \\ \cline{1-1}
\neg(\neg P),\ \neg Q & \neg \vee (4) & \times \\
\times & &
\end{array} & \to (1)
\end{array}$$

Dado que existe um tableau fechado para o conjunto

$$\{((\neg P) \vee Q) \to R,\ \neg((\neg P) \to (S \to R))\}$$

tem-se que $((\neg P) \vee Q) \to R \vdash_{\mathcal{T}} (\neg P) \to (S \to R)$.

2.a) Pretende-se saber se a fórmula $(\neg P) \to (S \to R)$ é consequência semântica de $((\neg P) \vee Q) \to R$. Como se pede para usar o sistema $\mathcal{T}$ para tal propósito, começa-se por averiguar se

$$((\neg P) \vee Q) \to R \vdash_{\mathcal{T}} (\neg P) \to (S \to R)$$

ou seja, vai tentar construir-se um tableau fechado para o conjunto $\{((\neg P) \vee Q) \to R,\ \neg((\neg P) \to (S \to R))\}$.

Mas, na alínea 1.b) anterior, foi já construído um tableau fechado para este conjunto, tendo-se aí concluído precisamente que se tem

$$((\neg P) \vee Q) \to R \vdash_{\mathcal{T}} (\neg P) \to (S \to R).$$

Então, pela propriedade da correcção do sistema dedutivo $\mathcal{T}$ tem-se que $(\neg P) \to (S \to R)$ é consequência semântica de $((\neg P) \vee Q) \to R$, ou seja,

$$((\neg P) \vee Q) \to R \models (\neg P) \to (S \to R)$$

2.b) Pretende-se saber se a fórmula $(\neg P) \vee (Q \to R)$ é consequência semântica do conjunto de fórmulas $\{((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P),\ S \vee R\}$. Como se pede para usar o sistema $\mathcal{T}$ para tal propósito, tal como na alínea anterior, começa-se por averiguar se

$$\{((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P),\ S \vee R\} \vdash_{\mathcal{T}} (\neg P) \vee (Q \to R)$$

ou seja, vai tentar construir-se um tableau fechado para o conjunto $\{((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P),\ S \vee R,\ \neg((\neg P) \vee (Q \to R))\}$:

$$
\begin{array}{c}
((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P)^{(1)},\ S \vee R^{(2)},\ \neg((\neg P) \vee (Q \to R))^{(3)} \\
\hline
\neg \vee (3) \\
\neg(\neg P)^{(4)},\ \neg(Q \to R)^{(5)} \\
\hline
\neg\neg(4) \\
P \\
\hline
\neg \to (5) \\
Q,\ \neg R \\
\hline
\vee(2) \\
\begin{array}{cc}
\begin{array}{c}
S \\
\hline
\vee(1) \\
\begin{array}{cc}
(\neg P) \wedge R &
\begin{array}{c}
Q \to P^{(7)} \\
\hline
\to (7) \\
\begin{array}{cc}
\neg Q & P \\
\times & \Uparrow
\end{array}
\end{array}
\end{array}
\end{array}
&
\begin{array}{c}
R \\
\times
\end{array}
\end{array}
\end{array}
$$

O ramo sinalizado com $\Uparrow$ é esgotado (ou seja, informalmente, a cada fórmula do ramo a que pode ser aplicada uma regra do sistema $\mathcal{T}$, já foi aplicada essa regra, relativamente a este ramo) e este ramo é também aberto.

Nestas circunstâncias, existe uma propriedade do sistema $\mathcal{T}$ que estabelece que deste ramo se pode extrair uma valoração que satisfaz todas as fórmulas na raiz do tableau: é uma valoração V tal que $V(P) = V(S) = V(Q) = 1$ e $V(R) = 0$.

Assim $V(((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P)) = 1$ e $V(S \vee R) = 1$. Tem-se também que $V(\neg((\neg P) \wedge (Q \to R))) = 1$, isto é, $V((\neg P) \wedge (Q \to R)) = 0$. Consequentemente, existe uma valoração que satisfaz todas hipóteses

$$((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P) \qquad \text{e} \qquad S \vee R$$

mas não satisfaz a conclusão

$$(\neg P) \wedge (Q \to R).$$

Deste modo conclui-se que $(\neg P) \wedge (Q \to R)$ não é consequência semântica de $\{((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P),\ S \vee R\}$, isto é,

$$\{((\neg P) \wedge R) \vee (Q \to P),\ S \vee R\} \not\models (\neg P) \wedge (Q \to R).$$

Grupo 2

1. Pretende-se saber se a fórmula $(\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))) \to (\forall x(Q(x) \to (\neg P(x)))$ é teorema do sistema $\mathcal{T}$. Para tal, há que averiguar se existe um tableau fechado para $\neg((\neg \exists x(P(x) \wedge Q(x))) \to (\forall x(Q(x) \to (\neg P(x))))$:

$$\dfrac{\neg((\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x)))\rightarrow(\forall x(Q(x)\rightarrow(\neg P(x)))))^{(1)}}{\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x))^{(2)},\ \neg(\forall x(Q(x)\rightarrow(\neg P(x))))^{(3)}}\ \neg\rightarrow(1)$$

$$\dfrac{}{\neg(Q(y)\rightarrow(\neg P(y)))^{(4)}}\ \neg\forall(3)$$

$$\dfrac{}{Q(y),\ \neg(\neg P(y))}\ \neg\rightarrow(4)$$

$$\dfrac{}{\neg(P(y)\wedge Q(y))^{(5)}}\ \neg\exists(2)$$

$$\dfrac{}{\begin{array}{cc}\neg P(y) & \neg Q(y)\\ \times & \times\end{array}}\ \wedge(5)$$

Encontrou-se um tableau fechado para o conjunto indicado. Conclui-se então que

$$\vdash_{\mathcal{T}}\ (\neg\exists x(P(x)\wedge Q(x)))\rightarrow(\forall x(Q(x)\rightarrow(\neg P(x)))$$

como pretendido.

2. Pretende-se verificar que $\forall x(\exists y((\neg P(x))\rightarrow Q(y)))$ é consequência semântica de $\forall x((\neg P(x))\wedge(\exists y\ Q(y)))$. Como o objectivo é usar o sistema $\mathcal{T}$ para tal propósito, há que começar por mostrar que $\forall x(\exists y((\neg P(x))\rightarrow Q(y)))$ se deriva de $\forall x((\neg P(x))\wedge(\exists y\ Q(y)))$ no sistema $\mathcal{T}$, isto é, que

$$\forall x((\neg P(x))\wedge(\exists y\ Q(y)))\vdash_{\mathcal{T}}\forall x(\exists y((\neg P(x))\rightarrow Q(y))).$$

Como se sabe, por definição, tal acontece quando existe um tableau fechado para o conjunto
$\{\forall x((\neg P(x)\wedge(\exists y\ Q(y))),\ \neg(\forall x(\exists y((\neg P(x))\rightarrow Q(y)))\}$:

$$\dfrac{\forall x((\neg P(x)) \wedge (\exists y\, Q(y)))^{(1)},\ \neg(\forall x(\exists y((\neg P(x)) \to Q(y))))^{(2)}}{\neg\exists y((\neg P(z)) \to Q(y))^{(3)}}\ \neg\forall(2)$$

$$\dfrac{}{(\neg P(z)) \wedge (\exists y\, Q(y))^{(4)}}\ \forall(1)$$

$$\dfrac{}{\neg P(z),\ \exists y\, Q(y)^{(5)}}\ \wedge(4)$$

$$\dfrac{}{Q(w)}\ \exists(5)$$

$$\dfrac{}{\neg((\neg P(z)) \to Q(w))^{(6)}}\ \neg\exists(3)$$

$$\dfrac{}{\neg(\neg P(z)),\ \neg Q(w)}\ \neg \to (6)$$

$$\times$$

Conclui-se assim que

$$\forall x((\neg P(x)) \wedge (\exists y\, Q(y))) \vdash_{\mathcal{T}} \forall x(\exists y((\neg P(x)) \to Q(y))).$$

Pela correcção do sistema $\mathcal{T}$, tem-se que

$$\forall x((\neg P(x) \wedge (\exists y\, Q(y))) \models \forall x(\exists y((\neg P(x)) \to Q(y)))$$

como pretendido.

Grupo 3

Pretende-se verificar se a fórmula $(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))$ é consequência semântica da fórmula $\exists x\,((\neg Q(x))\wedge R(x))$, ou seja, pretende-se saber se

> quaisquer que sejam a estrutura de interpretação $\mathbb{M}\!\mathbb{I} = (U, I)$ e a atribuição de valores às variáveis $\rho : X \to U$, se tem que
>
> <u>se</u> $[\![\exists x\,((\neg Q(x))\wedge R(x))]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}\!\mathbb{I}} = 1$
> <u>então</u> $[\![(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}\!\mathbb{I}} = 1$
>
> (isto é, se $\mathbb{M}\!\mathbb{I}$ e ρ satisfazem $(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))$ então $\mathbb{M}\!\mathbb{I}$ e ρ satisfazem $(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))$).

A afirmação é verdadeira, o que se justifica como se segue.

1. Seja $\mathbb{M}\!\mathbb{I} = (U, I)$ e $\rho : X \to U$ tal que $[\![\exists x\,((\neg Q(x))\wedge R(x))]\!]^{\rho}_{\mathbb{M}\!\mathbb{I}} = 1$.
2. Por 1, existe $u \in U$ tal que $[\![(\neg Q(x))\wedge R(x)]\!]^{\rho[x:=u]}_{\mathbb{M}\!\mathbb{I}} = 1$.

3. Por 2, existe $u \in U$ tal que

   (a) $[\![\neg Q(x)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x:=u]} = 1$ e
   (b) $[\![R(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x:=u]} = 1$.

4. Por 3a, $[\![\exists x(\neg Q(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$.

5. Por 3b, $[\![\exists x\, R(x)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$.

6. Por 4 e 5, $[\![(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$.

Uma justificação **alternativa**, recorrendo a uma prova por absurdo, é a seguinte:

1. Suponha-se, por absurdo, que existe $\mathbb{M} = (U, I)$ e $\rho : X \to U$ tal que

   (a) $[\![\exists x\,((\neg Q(x))\wedge R(x)))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$ e
   (b) $[\![(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 0$.

2. Por 1a, existe $u \in U$ tal que $[\![(\neg Q(x))\wedge R(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x:=u]} = 1$.

3. Por 2, existe $u \in U$ tal que

   (a) $[\![\neg Q(x)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x:=u]} = 1$ e
   (b) $[\![R(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho[x:=u]} = 1$.

4. Por 3a, $[\![\exists x(\neg Q(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$.

5. Por 3b, $[\![\exists x\, R(x)]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$.

6. Por 4 e 5, $[\![(\exists x\,(\neg Q(x)))\wedge(\exists x\, R(x))]\!]_{\mathbb{M}}^{\rho} = 1$.

7. Contradição entre 6 e 1b.

Nota: nesta resolução, ao construir os diferentes tableaux e para facilitar a sua análise, optou-se por atribuir um número a certas fórmulas, o qual era depois referido na aplicação das regras; não é obrigatório que os alunos sigam este procedimento na resolução do teste.