Teste 4 - Teste tipo

Resolução

Grupo 1

1.Pretende-se saber se a fórmula $((\forall x\,T(x))\to(\exists x\,S(x)))\to(\exists x(T(x)\to S(x)))$ é teorema do sistema dedutivo $\mathcal{T}$. Para tal, por definição de teorema do sistema $\mathcal{T}$, há que verificar se

$$\neg(((\forall x\,T(x))\to(\exists x\,S(x)))\to(\exists x(T(x)\to S(x))))$$

é fórmula confutada, ou seja, há que verificar se existe um tableau fechado para o conjunto constituído por esta fórmula:

$$\dfrac{\dfrac{\neg(((\forall x\,T(x))\to(\exists x\,S(x)))\to(\exists x(T(x)\to S(x))))^{(1)}}{(\forall x\,T(x))\to(\exists x\,S(x))^{(2)},\ \neg(\exists x(T(x)\to S(x)))^{(4)}}\ \neg\to(1)}{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\forall x\,T(x))^{(3)}}{\neg T(z)}\ \neg\forall\ (3)}{\neg(T(z)\to S(z))^{(5)}}\ \neg\exists\ (4)}{\begin{array}{c}T(z),\neg S(z)\\ \times\end{array}}\ \neg\to\ (5) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\exists x\,S(x)^{(6)}}{S(y)}\ \exists\ (6)}{\neg(T(y)\to S(y))^{(7)}}\ \neg\exists\ (4)}{\begin{array}{c}T(y),\neg S(y)\\ \times\end{array}}\ \neg\to\ (7)}\ \to(2)$$

Dado que existe o tableau fechado pretendido, tem-se

$$\vdash_{\mathcal{T}}\ ((\forall x\,T(x))\to(\exists x\,S(x)))\to(\exists x(T(x)\to S(x))).$$

2 A cláusula $\neg A\vee B$ é equivalente a $\neg(A\wedge\neg B)$. A derivação seguinte é uma derivação em $\mathcal{R}$ de $\perp$ a partir de C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e de $\{\neg A,B\}$:

1. $\{\neg A,B\}$ HIP
2. $\{\neg B,C\}$ HIP
3. $\{\neg A,C\}$ *res* 1, 2
4. $\{A,\neg D\}$ HIP
5. $\{C,D\}$ HIP
6. $\{A,C\}$ *res* 4, 5
7. $\{C\}$ *res* 3, 6
8. $\{\neg C,E\}$ HIP
9. $\{\neg C,\neg E\}$ HIP
10. $\{\neg C\}$ *res* 8, 9
11. $\perp$ *res* 9, 10

Portanto o conjunto $\{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, \{\neg A, B\}\}$ é incoerente. Pela correcção do sistema $\mathcal{R}$ tem-se então que este conjunto é contraditório, pelo que

$$C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 \models A \wedge (\neg B)$$

Grupo 2

1.a.

$$\begin{array}{c} |3|0|0|0|\ldots \\ 1,2 \\ |3|1|0|0|\ldots \\ 3,4 \\ |3|1|2|0|\ldots \\ 5,1,2 \\ |3|2|2|0|\ldots \\ 3,4 \\ |3|2|4|0|\ldots \\ 5,1,2 \\ |3|3|4|0|\ldots \\ 3,4 \\ |3|3|6|0|\ldots \\ 5,1,6 \\ |6|3|6|0|\ldots \end{array}$$

1.b. O programa calcula a seguinte função de um argumento: $f : I\!\!N_0 \to I\!\!N_0$ tal que $f(x) = 2x$.

2.

1 J(1,2,11)
2 (2)
3 J(1,2,11)
4 S(5)
5 S(2)
6 LESS[1,2,4]
7 J(4,5,11)
8 S(3)
9 SUM[2,2,2]
10 J(1,1,6)
11 T(3,1)

Nota: detalhes sobre esta solução para o exercício podem ser encontrados na lista de exercícios resolvidos publicada na página www da disciplina.

Grupo 3

Seja t' um *tableau* obtido a partir de um *tableau* t por aplicação da regra $\neg \Downarrow$ e seja r um ramo de t tal que $Form(r)$ é um conjunto possível (ou seja, existe uma valoração V que atribui o valor 1 a todas as fórmulas do conjunto).

Se r não é o ramo a que se aplicou a regra $\neg \Downarrow$, então r é também um ramo de t' e portanto t' tem um ramo com a propriedade pretendida. Caso contrário, $\neg(\varphi_1 \Downarrow \varphi_2)$ está em r e em t' existem dois ramos r'_1 e r'_2 tais que $Form(r'_1) = Form(r) \cup \{\varphi_1\}$ e $Form(r'_2) = Form(r) \cup \{\neg\varphi_2\}$. Seja V uma valoração que atribui o valor 1 a todas as fórmulas em $Form(r)$. Então $V(\neg(\varphi_1 \Downarrow \varphi_2)) = 1$, ou seja, $V(\varphi_1 \Downarrow \varphi_2) = 0$. Assim, $V(\varphi_1) = 1$ ou $V(\varphi_2) = 0$. No primeiro caso, V atribui o valor 1 a todas as fórmulas em $Form(r'_1)$. No segundo caso, V atribui o valor 1 a todas as fórmulas em $Form(r'_2)$. Deste modo, em t' existe um ramo tal que o conjunto das suas fórmulas é um conjunto possível, como pretendido.