PROPOSIÇÃO: *Para cada expressão regular* $\alpha \in R_I$ *existe um autómato finito determinista* D *tal que* $L(\alpha) = L_D$.

Prova (esboço):
Prova-se, por indução na complexidade das expressões regulares $\alpha \in R_I$ que, para cada expressão regular $\alpha \in R_I$ existe um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A, tal que $L(\alpha) = L_A$. Como, por duas proposições anteriores, para cada autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A, existe autómato finito não determinista , A', tal que $L_A = L_{A'}$ e para cada autómato finito não determinista, A', existe um autómato finito determinista D tal que $L_D = L_{A'}$ a proposição fica assim provada. Segue-se a definição da noção de complexidade de uma expressão regular e depois a prova por indução referida.

A *complexidade* de uma expressão regular define-se como uma aplicação

$$C : R_I \to \mathbb{N}_0$$

tal que

- $C(\alpha) = 0$ sempre que $\alpha \in I \cup \{\emptyset, \epsilon\}$
- $C(\alpha + \beta) = C(\alpha) + C(\beta) + 1$
- $C(\alpha\beta) = C(\alpha) + C(\beta) + 1$
- $C(\alpha^*) = C(\alpha) + 1$.

(i) Prova-se em primeiro lugar a *base de indução*: para cada expressão regular α de complexidade 0 existe um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A, tal que $L(\alpha) = L_A$.

- Se $\alpha = a$ com $a \in I$ considere-se o autómato

  $$A = (\{q_0, q_1\}, I, \delta, q_0, \{q_1\})$$

  onde $\delta : \{q_0, q_1\} \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^{\{q_0,q_1\}}$ é tal que $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$ e $\delta(q, i) = \emptyset$ nos outros casos. Facilmente se conclui que $L(\alpha) = \{a\} = L_D$.

- Se $\alpha = \emptyset$ considere-se o autómato

  $$A = (\{q_0, q_1\}, I, \delta, q_0, \{q_1\})$$

  onde $\delta : \{q_0, q_1\} \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^{\{q_0,q_1\}}$ é a aplicação que a cada elemento do domínio atribui a imagem $\emptyset$. Facilmente se conclui que $L(\emptyset) = \emptyset = L_A$.

- Se $\alpha = \epsilon$ considere-se o autómato

  $$A = (\{q_0\}, I, \delta, q_0, \{q_0\})$$

  onde $\delta : \{q_0\} \times (I \cup \{\epsilon\}) \to \{q_0\}$ é a aplicação que a cada elemento do domínio atribui a imagem $\emptyset$. Facilmente se conclui que $L(\epsilon) = \{\epsilon\} = L_A$.

(ii) Prova-se agora o *passo de indução*: admitindo, *por hipótese de indução*, que para cada expressão regular α' de complexidade menor ou igual a n ($n \geq 0$) existe um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, $A_{\alpha'}$, tal que $L(\alpha') = L_{A_{\alpha'}}$, mostra-se que para cada expressão regular α de complexidade n+1 existe um autómato finito não determinista com movimentos ϵ, A_α, tal que $L(\alpha) = L_{A_\alpha}$.

- Se $\alpha = \beta+\gamma$ tem complexidade $n+1$ então β e γ têm complexidade menor ou igual a n e portanto, pela hipótese de indução, existem autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ

$$A_\beta = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$$

$$A_\gamma = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$$

  tais que $L(\beta) = L_{A_\beta}$, $L(\gamma) = L_{A_\gamma}$ e, sem perda de generalidade, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Considera-se o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A_\alpha = (Q, I, \delta, q_0, F_1 \cup F_2)$$

  onde

  - $Q = Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$ onde $q_0 \notin Q_1 \cup Q_2$
  - $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ tal que
    * $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_0^1, q_0^2\}$
    * $\delta(q_0, a) = \emptyset$ para cada $a \in I$
    * para cada $q \in Q_1$ e $a \in I \cup \{\epsilon\}$, $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$
    * para cada $q \in Q_2$ e $a \in I \cup \{\epsilon\}$, $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$.

  Ter-se-ia de provar agora que $L_{A_\alpha} = L(\beta + \gamma)$.

- Se $\alpha = \beta\gamma$ tem complexidade $n+1$ então β e γ têm complexidade menor ou igual a n e portanto, pela hipótese de indução existem autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ

$$A_\beta = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$$

$$A_\gamma = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$$

  tais que $L(\beta) = L_{A_\beta}$, $L(\gamma) = L_{A_\gamma}$ e, sem perda de generalidade, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. Considera-se o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A_\alpha = (Q_1 \cup Q_2, I, \delta, q_0^1, F_2)$$

  onde

  - $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ tal que
    * $\delta(q, \epsilon) = \{q_0^2\} \cup \delta_1(q, \epsilon)$ para cada $q \in F_1$
    * $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para cada $a \in I$ e $q \in F_1$
    * para cada $q \in Q_1 \backslash F_1$ e $a \in I \cup \{\epsilon\}$, $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$

- $*$ para cada $q \in Q_2$ e $a \in I \cup \{\epsilon\}$, $\delta(q, a) = \delta_2(q, a)$.

Ter-se-ia de provar agora que $L_{A_\alpha} = L(\beta\gamma)$.

- Se $\alpha = \beta^*$ tem complexidade $n+1$ então β tem complexidade menor ou igual a n e portanto, pela hipótese de indução, existe um autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A_\beta = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$$

tal que $L(\beta) = L_{A_\beta}$. Considera-se o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A_\alpha = (Q, I, \delta, q_0, F)$$

onde

  - $Q = Q_1 \cup \{q_0\}$ com $q_0 \notin Q_1$
  - $F = F_1 \cup \{q_0\}$
  - $\delta : Q \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^Q$ tal que
    - $*$ $\delta(q_0, \epsilon) = \{q_0^1\}$
    - $*$ $\delta(q_0, a) = \emptyset$ para cada $a \in I$
    - $*$ $\delta(q, \epsilon) = \{q_0^1\} \cup \delta_1(q, \epsilon)$ para cada $q \in F_1$
    - $*$ $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para cada $a \in I$ e $q \in F_1$
    - $*$ para cada $q \in Q_1 \backslash F_1$ e $a \in I \cup \{\epsilon\}$, $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$.

Ter-se-ia de provar agora que $L_{A_\alpha} = L(\beta^*)$.

NOTA: A construção acima descrita para obter o autómato A_α tal que $L_{A_\alpha} = L(\beta^*)$ a partir do autómato A_β é uma construção geral, no sentido em que é uma construção que pode ser aplicada *qualquer que seja* o autómato finito A_β. No entanto, se o autómato A_β tiver certas características, a construção de A_α pode ser mais simples (nomeadamente, não é necessário introduzir o novo estado q_0). Tem-se então a construção que se segue.

- Seja β uma expressão regular e

$$A_\beta = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$$

um autómato finito não determinista com movimentos ϵ tal que $L(\beta) = L_{A_\beta}$ e[1]

$$q_0^1 \in F_1 \text{ ou } \{q \in Q_1 : \text{existe } x \in I \cup \{\epsilon\} \text{ tal que } \delta(q, x) = q_0^1\} = \emptyset.$$

[1] A restrição imposta é necessária para que esta construção esteja correcta. Considere-se o autómato $A_\beta = (\{q_0, q_1\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1\})$ tal que $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$ e $\delta(q_1, b) = \{q_0\}$. Tem-se que $L_A = L(\beta)$ com $\beta = a(ba)^*$ e não é verificada a restrição indicada. Se se considerar o autómato A_α obtido a partir desta nova construção tem-se que $ab \in L_{A_\alpha}$ (pois q_0 passa a ser um estado final) mas $ab \notin \beta^*$.

Considera-se o autómato finito não determinista com movimentos ϵ

$$A_\alpha = (Q_1, I, \delta, q_0^1, F_1 \cup \{q_0^1\})$$

onde

- $\delta : Q_1 \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^{Q_1}$ tal que
  - $\delta(q, \epsilon) = \{q_0^1\} \cup \delta_1(q, \epsilon)$ para cada $q \in F_1$
  - $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$ para cada $a \in I$ e $q \in F_1$
  - para cada $q \in Q_1 \backslash F_1$ e $a \in I \cup \{\epsilon\}$, $\delta(q, a) = \delta_1(q, a)$.

Ter-se-ia de provar agora que $L_{A_\alpha} = L(\beta^*)$.

Exemplo: Pretende-se encontrar um autómato finito não determinista com movimentos ϵ cuja linguagem seja a linguagem denotada por $(11)^* + (10)^*$. Este autómato é obtido de forma incremental da seguinte forma:

- $A_1^1 = (\{q_0, q_1\}, \{0, 1\}, \delta_1^1, q_0, \{q_1\})$ onde δ_1^1 é tal que

δ_1^1	0	1	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $A_1^2 = (\{q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta_1^2, q_2, \{q_3\})$ onde δ_1^2 é tal que

δ_1^2	0	1	ϵ
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $A_{11} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta_{11}, q_0, \{q_3\})$ onde δ_{11} é tal que

δ_{11}	0	1	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $A_{(11)^*} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{0, 1\}, \delta_{(11)^*}, q_0, \{q_3, q_0\})$ onde $\delta_{(11)^*}$ é tal que

$\delta_{(11)^*}$	0	1	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0\}$

- $A_1^3 = (\{q_5, q_6\}, \{0, 1\}, \delta_1^3, q_5, \{q_6\})$ onde δ_1^3 é tal que

δ_1^3	0	1	ϵ
q_5	$\emptyset$	$\{q_6\}$	$\emptyset$
q_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $A_0 = (\{q_7, q_8\}, \{0, 1\}, \delta^0, q_7, \{q_8\})$ onde δ_0 é tal que

δ_0	0	1	ϵ
q_7	$\{q_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $A_{10} = (\{q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{0, 1\}, \delta_{01}, q_5, \{q_8\})$ onde δ_{10} é tal que

δ_{01}	0	1	ϵ
q_5	$\emptyset$	$\{q_6\}$	$\emptyset$
q_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_7\}$
q_7	$\{q_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

- $A_{(10)^*} = (\{q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, \}, \{0, 1\}, \delta_{(10)^*}, q_5, \{q_8, q_5\})$ onde $\delta_{(10)^*}$ é tal que

$\delta_{(10)^*}$	0	1	ϵ
q_5	$\emptyset$	$\{q_6\}$	$\emptyset$
q_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_7\}$
q_7	$\{q_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_5\}$

- $A_{(11)^*+(10)^*} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}, \{0, 1\},$ $\delta_{(11)^*+(10)^*}, q_4, \{q_0, q_3, q_5, q_8\})$ onde $\delta_{(11)^*+(10)^*}$ é tal que

$\delta_{(11)^*+(10)^*}$	0	1	ϵ
q_0	$\emptyset$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
q_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_4	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0, q_5\}$
q_5	$\emptyset$	$\{q_6\}$	$\emptyset$
q_6	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_7\}$
q_7	$\{q_8\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
q_8	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_5\}$

A partir do autómato anterior, e usando algoritmos estudados, poder-se-ia obter um autómato não determinista sem movimentos ϵ e um autómato determinista.

OBSERVAÇÃO:

- A construção acima indicada para a obtenção de um autómato cuja linguagem gerada é $L(\beta + \gamma)$ constitui uma demonstração alternativa para o resultado, anteriormente apresentado e provado, que estabelece que a classe das linguagens regulares é fechada para a união. Assim, dado um autómato A_1 cuja linguagem é L_1 e um autómato A_2 cuja linguagem é L_2, a construção acima indicada permite encontrar um autómato A cuja linguagem é $L_1 \cup L_2$.

- A construção acima indicada para a obtenção de um autómato cuja linguagem gerada é $L(\beta\gamma)$ constitui uma demonstração para o resultado, anteriormente apresentado, que estabelece que a classe das linguagens regulares é fechada para a concatenação. Assim, dado um autómato A_1 cuja linguagem é L_1 e um autómato A_2 cuja linguagem é L_2, a construção acima indicada permite encontrar um autómato A cuja linguagem é L_1L_2.

- A construção acima indicada para a obtenção de um autómato cuja linguagem gerada é $L(\beta^*)$ constitui uma demonstração para o resultado, anteriormente apresentado, que estabelece que a classe das linguagens regulares é fechada para o fecho de Kleene. Assim, dado um autómato A_1 cuja linguagem é L_1, a construção acima indicada permite encontrar um autómato A cuja linguagem é L_1^*.

Exemplo: Sejam

- L_1 o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm no mínimo dois 0s;
- L_2 o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm no máximo um 1;
- L_3 o conjunto das sequências de 0's e 1's que contêm a sequência 010;
- L_4 o conjunto das sequências de 0's e 1's que contêm um número par de 0's;
- L_5 o conjunto das sequências de 0's e 1's que começam em 0 e terminam em 1.

Usando as técnicas aprendidas no contexto do algoritmo que permite construir um autómato finito não determinista com movimentos ϵ a partir de uma expressão regular, pretende-se encontrar autómatos finitos não deterministas com movimentos ϵ que reconheçam exactamente as seguintes linguagens

1. $L_1 \cup L_2$
2. $L_3 \cup L_4$
3. $L_4 \cup L_5$
4. L_1L_2
5. L_2L_1
6. L_1^*
7. L_2^*
8. L_3^*
9. L_5^*

Os seguintes autómatos reconhecem as linguagens em causa.

- $A_1 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta_1, q_0, \{q_2\})$ onde δ_1 é tal que

δ_1	0	1
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$

  reconhece exactamente L_1.

- $A_2 = (\{p_0, p_1\}, \{0, 1\}, \delta_2, p_0, \{p_0, p_1\})$ onde δ_2 é tal que

δ_2	0	1
p_0	$\{p_0\}$	$\{p_1\}$
p_1	$\{p_1\}$	$\emptyset$

  reconhece exactamente L_2.

- $A_3 = (\{r_0, r_1, r_2, r_3\}, \{0, 1\}, \delta_3, r_0, \{r_3\})$ onde δ_3 é tal que

δ_3	0	1
r_0	$\{r_1\}$	$\{r_0\}$
r_1	$\{r_1\}$	$\{r_2\}$
r_2	$\{r_3\}$	$\{r_0\}$
r_3	$\{r_3\}$	$\{r_3\}$

  reconhece exactamente L_3.

- $A_4 = (\{s_0, s_1\}, \{0, 1\}, \delta_4, s_0, \{s_0\})$ onde δ_4 é tal que

δ_4	0	1
s_0	$\{s_1\}$	$\{s_0\}$
s_1	$\{s_0\}$	$\{s_1\}$

  reconhece exactamente L_4.

- $A_5 = (\{t_0, t_1, t_2\}, \{0, 1\}, \delta_5, t_0, \{t_2\})$ onde δ_5 é tal que

δ_5	0	1
t_0	$\{t_1\}$	$\emptyset$
t_1	$\{t_1\}$	$\{t_2\}$
t_2	$\{t_1\}$	$\{t_2\}$

  reconhece exactamente L_5.

- $L_1 \cup L_2$ é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{q, q_0, q_1, q_2, p_0, p_1\}, \{0, 1\}, \delta, q, \{q_2, p_0, p_1\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
q	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0, p_0\}$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
p_0	$\{p_0\}$	$\{p_1\}$	$\emptyset$
p_1	$\{p_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

- Para $L_3 \cup L_4$ e $L_4 \cup L_5$ faz-se uma construção idêntica.

- $L_1 L_2$ é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{q_0, q_1, q_2, p_0, p_1\}, \{0, 1\}, \delta, q_0, \{p_0, p_1\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{p_0\}$
p_0	$\{p_0\}$	$\{p_1\}$	$\emptyset$
p_1	$\{p_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$

- L_2L_1 é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{q_0, q_1, q_2, p_0, p_1\}, \{0, 1\}, \delta, p_0, \{q_2\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
p_0	$\{p_0\}$	$\{p_1\}$	$\{q_0\}$
p_1	$\{p_1\}$	$\emptyset$	$\{q_0\}$

- Para L_3L_4 e L_4L_5 faz-se uma construção idêntica.

- L_1^* é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{q, q_0, q_1, q_2\}, \{0, 1\}, \delta, q, \{q, q_2\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
q	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_0\}$
q_0	$\{q_1\}$	$\{q_0\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1\}$	$\emptyset$
q_2	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$

- L_2^* é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{p_0, p_1\}, \{0, 1\}, \delta, p_0, \{p_0, p_1\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
p_0	$\{p_0\}$	$\{p_1\}$	$\{p_0\}$
p_1	$\{p_1\}$	$\emptyset$	$\{p_0\}$

- L_3^* é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{q, \{r_0, r_1, r_2, r_3\}, \{0, 1\}, \delta, q, \{q, r_3\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
q	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{r_0\}$
r_0	$\{r_1\}$	$\{r_0\}$	$\emptyset$
r_1	$\{r_1\}$	$\{r_2\}$	$\emptyset$
r_2	$\{r_3\}$	$\{r_0\}$	$\emptyset$
r_3	$\{r_3\}$	$\{r_3\}$	$\{q_0\}$

- L_5^* é reconhecida pelo autómato não determinista com movimentos ϵ $A = (\{t_0, t_1, t_2\}, \{0, 1\}, \delta, t_0, \{t_0, t_2\})$ onde δ é tal que

δ	0	1	ϵ
t_0	$\{t_1\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
t_1	$\{t_1\}$	$\{t_2\}$	$\emptyset$
t_2	$\{t_1\}$	$\{t_2\}$	$\{t_0\}$