Autómatos finitos não deterministas

Definição: AUTÓMATO FINITO NÃO DETERMINISTA
Um autómato finito não determinista é um tuplo

$$A = (Q, I, \delta, q_0, F)$$

onde

- Q é um conjunto finito e não vazio (conjunto dos estados)
- I é um conjunto finito (conjunto dos símbolos de entrada)
- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ é uma função total (função de transição directa)
- $q_0 \in Q$ (estado inicial)
- $F \subseteq Q$, tal que $F \neq \emptyset$ (conjunto dos estados finais).

A função de transição define-se recursivamente usando a função de transição directa.

Definição: FUNÇÃO TRANSIÇÃO
Seja $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ um autómato finito não determinista. A função

$$\delta^* : Q \times I^* \to 2^Q$$

tal que

- $\delta^*(q, \epsilon) = \{q\}$
- $\delta^*(q, w.i) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q,w)} \delta(q', i)$

onde $w \in I^*$ e $i \in I$, diz-se função de transição.

Definição: SEQUÊNCIA ACEITE E LINGUAGEM RECONHECIDA POR AUTÓMATO FINITO DETERMINISTA
Seja $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ um autómato finito não determinista. A sequência $w \in I^*$ diz-se aceite por A sse $\delta^*(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$. A linguagem reconhecida por A, ou linguagem de A, representa-se por L_A e é o conjunto das sequências aceites por A.

Exemplo: Pretende-se definir um autómato finito não determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de 0's e 1's que têm 1 na penúltima posição. Uma possibilidade é o autómato $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$

- $I = \{0, 1\}$
- $F = \{q_2\}$
- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1
q_0	$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$

Exemplo: Considere-se o autómato finito não determinista $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com

- $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $I = \{0, 1, 2\}$
- $F = \{q_2\}$
- $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1	2
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_2\}$	$\emptyset$
q_1	$\emptyset$	$\{q_1, q_2\}$	$\emptyset$
q_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{q_2\}$

Pretende-se verificar se as seguintes sequências fazem parte da linguagem reconhecida pelo autómato.

- 001
  - $\delta^*(q_0, 001) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 00)} \delta(q', 1) = \bigcup_{q' \in \{q_0, q_1\}} \delta(q', 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_2\} \cup \{q_1, q_2\} = \{q_1, q_2\}$
  - $\delta^*(q_0, 00) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 0)} \delta(q', 0) = \bigcup_{q' \in \{q_0, q_1\}} \delta(q', 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\delta^*(q_0, 0) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, \epsilon)} \delta(q', 0) = \bigcup_{q' \in \{q_0\}} \delta(q', 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

  Como $\delta^*(q_0, 001) = \{q_1, q_2\}$ e $\{q_1, q_2\} \cap F \neq \emptyset$ tem-se que $001 \in L_A$.

- 00
  - $\delta^*(q_0, 00) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 0)} \delta(q', 0) = \bigcup_{q' \in \{q_0, q_1\}} \delta(q', 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
  - $\delta^*(q_0, 0) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, \epsilon)} \delta(q', 0) = \bigcup_{q' \in \{q_0\}} \delta(q', 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

  Como $\delta^*(q_0, 00) = \{q_0, q_1\}$ e $\{q_0, q_1\} \cap F = \emptyset$ tem-se que $00 \notin L_A$.

- 0011

- $\delta^*(q_0, 0011) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 001)} \delta(q', 1) = \bigcup_{q' \in \{q_1, q_2\}} \delta(q', 1) = \delta(q_1, 1) \cup \delta(q_2, 1) = \{q_1, q_2\} \cup \emptyset = \{q_1, q_2\}$
- $\delta^*(q_0, 001) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 00)} \delta(q', 1) = \bigcup_{q' \in \{q_0, q_1\}} \delta(q', 1) = \delta(q_0, 1) \cup \delta(q_1, 1) = \{q_2\} \cup \{q_1, q_2\} = \{q_1, q_2\}$
- $\delta^*(q_0, 00) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 0)} \delta(q', 0) = \bigcup_{q' \in \{q_0, q_1\}} \delta(q', 0) = \delta(q_0, 0) \cup \delta(q_1, 0) = \{q_0, q_1\} \cup \emptyset = \{q_0, q_1\}$
- $\delta^*(q_0, 0) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, \epsilon)} \delta(q', 0) = \bigcup_{q' \in \{q_0\}} \delta(q', 0) = \delta(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$

Como $\delta^*(q_0, 001) = \{q_1, q_2\}$ e $\{q_1, q_2\} \cap F \neq \emptyset$ tem-se que $0011 \in L_A$

- 121
  - $\delta^*(q_0, 121) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 12)} \delta(q', 1) = \bigcup_{q' \in \emptyset} \delta(q', 1) = \emptyset$
  - $\delta^*(q_0, 12) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, 1)} \delta(q', 2) = \bigcup_{q' \in \{q_2\}} \delta(q', 0) = \delta(q_2, 0) = \emptyset$
  - $\delta^*(q_0, 1) = \bigcup_{q' \in \delta^*(q_0, \epsilon)} \delta(q', 1) = \bigcup_{q' \in \{q_0\} \delta(q', 1)} = \delta(q_0, 1) = \{q_2\}$

  Como $\delta^*(q_0, 001) = \emptyset$ e $\emptyset \cap F = \emptyset$ tem-se que $001 \notin L_A$.