PROPOSIÇÃO:*A classe das linguagens regulares é fechada para as seguintes operações*

1. *Intersecção*

   (ou seja, se L_1 e L_2 são linguagens regulares então a linguagem $L_1 \cap L_2$ é também regular)

2. *Complementação*

   (ou seja, se L é uma linguagem regular sobre um certo alfabeto I então a linguagem $I^* \backslash L$ é também regular[1]*)*

3. *União*

   (ou seja, se L_1 e L_2 são linguagens regulares então a linguagem $L_1 \cup L_2$ é também regular)

4. *Diferença*

   (ou seja, se L_1 e L_2 são linguagens regulares então a linguagem $L_1 \backslash L_2$ é também regular)

5. *Fecho de Kleene*

   (ou seja, se L é uma linguagem regular então a linguagem $L^* = \{\epsilon\} \cup \{w_1 \ldots w_n : w_i \in L$ para cada $1 \leq i \leq n$ e $n \in I\!N\}$ é também regular)

6. *Concatenação*

   (ou seja, se L_1 e L_2 são linguagens regulares então a linguagem $L_1L_2 = \{w_1w_2 : w_1 \in L_1$ e $w_2 \in L_2\}$ é também regular).

A veracidade das asserções 1, 2, 3 e 4 é consequência dos resultados enunciados (e provados) na proposição que se segue. Em particular, a veracidade de 3 resulta da de 1 e de 2. A veracidada das asserções 5 e 6 é consequência de um resultado que se apresentará mais adiante, quando se fizer referência à relação entre as linguagens reconhecidas por autómatos finitos e as linguagens denotadas por expressões regulares. Também nessa altura será apresentada uma prova directa para a asserção 3 (que não depende, portanto, da intersecção e da complementação).

[1] Neste caso da complementação é importante referir qual é o alfabeto I em relação ao qual se pretende o complementar. O que aqui se estabelece é que se L é uma linguagem regular sobre um certo alfabeto I (ou seja, L é L_D para algum autómato finito determinista D cujo conjunto dos símbolos de entrada é I) então $I^* \backslash L$ é também uma linguagem regular (e, como se verá de seguida, $I'^* \backslash L$ é também uma linguagem regular para qualquer alfabeto I' tal que $I \subseteq I'$).

PROPOSIÇÃO: *Sejam* $D_1 = (Q_1, I_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ *e* $D_2 = (Q_2, I_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$ *dois autómatos finitos deterministas tais*[2] *que* $I_1 = I_2 = I$. *Então*

1. $L_{D_1} \cap L_{D_2}$ *é uma linguagem regular;*
2. $I^* \backslash L_{D_1}$ $(\overline{L_{D_1}})$ *é uma linguagem regular*[3]*;*
3. $L_{D_1} \cup L_{D_2}$ *é uma linguagem regular;*
4. $L_{D_1} \backslash L_{D_2}$ *é uma linguagem regular.*

Esboço da prova de 1.:
Considerando o autómato finito determinista

$$D = (Q_1 \times Q_2, I, \delta, (q_0^1, q_0^2), F_1 \times F_2)$$

onde $\delta : (Q_1 \times Q_2) \times I \to Q_1 \times Q_2$ é tal que

- $\delta((q_1, q_2), i) = (\delta_1(q_1, i), \delta_2(q_2, i))$ sempre que $\delta_1(q_1, i)$ está definido e $\delta_2(q_2, i)$ está definido
- $\delta((q_1, q_2), i)$ não está definido, caso contrário

tem-se que $L_D = L_{D_1} \cap L_{D_2}$ (para a prova ficar completa haveria agora que provar esta igualdade)s. ∇

Prova de 2.:
(i) Suponha-se que δ_1 é uma aplicação e considere-se o autómato finito determinista

$$D = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, Q_1 \backslash F_1).$$

Mostra-se seguidamente que

$$L_D = \overline{L_{D_1}}$$

ou seja, que para cada $x \in I^*$, $x \in L_D$ sse $x \in I^* \backslash L_{D_1}$. Sendo $x \in I^*$ tem-se que

$$x \in L_D \text{ sse } \delta_1^*(q_0^1, x) \in Q_1 \backslash F_1$$
$$\text{sse}$$
$$\delta_1^*(q_0^1, x) \notin F_1$$

[2] Note-se que esta restrição não implica perda de generalidade. Se $I_1 \neq I_2$ podem considerar-se, por exemplo, os autómatos $D_1' = (Q_1, I_1 \cup I_2, \delta_1', q_0^1, F_1)$ e $D_2' = (Q_2, I_2 \cup I_1, \delta_2', q_0^2, F_2)$ onde $\delta_1' : Q_1 \times (I_1 \cup I_2) \to Q_1$ é tal que $\delta_1'(q, i)$ é igual a $\delta_1(q, i)$ se $i \in I_1$, $\delta_1'(q, i)$ não está definido se $i \notin I_1$ e δ_2' se define de modo análogo. Como facilmente se conclui, $L_{D_1} = L_{D_1'}$ e $L_{D_2} = L_{D_2'}$ e estes novos autómatos verificam a restrição indicada.

[3] O caso em que se pretende mostrar que é também regular a linguagem complementar de $L(D_1)$ relativamente a um outro alfabeto I' tal que $I \subset I'$, ou seja, o caso em que se pretende mostrar que é regular a linguagm $I'^* \backslash L_{D_1}$, é referido após a prova desta alínea.

$$\text{sse}$$
$$x \notin L_{D_1}$$
$$\text{sse}$$
$$x \in I^* \backslash L_{D_1}.$$

(ii) Suponha-se que δ_1 não é uma aplicação e considere-se o autómato finito determinista

$$D = (Q_1 \cup \{\overline{q}\}, I, \delta, q_0^1, (Q_1 \backslash F_1) \cup \{\overline{q}\})$$

onde $\overline{q} \notin Q_1$ e $\delta : (Q_1 \cup \{\overline{q}\}) \times I \to Q_1 \cup \{\overline{q}\}$ é tal que

- $\delta(q,i) = \delta_1(q,i)$ sempre que $q \in Q_1$ e $\delta_1(q,i)$ está definido
- $\delta(q,i) = \overline{q}$ sempre que $q \in Q_1$ e $\delta_1(q,i)$ não está definido
- $\delta(\overline{q},i) = \overline{q}$

Deixa-se como exercício a prova de que $L_D = \overline{L_{D_1}}$ ou seja, que para cada $x \in I^*$, $x \in L_D$ sse $x \in I^* \backslash L_{D_1}$.

Note-se que se se pretender obter um autómato que reconheça exactamente a linguagem complementar de L_{D_1} relativamente a um outro alfabeto I' tal que $I \subset I'$, ou seja, se se pretender obter um autómato que reconheça $I'^* \backslash L_{D_1}$, basta considerar, por exemplo, o autómato $D = (Q_1, I', \delta, q_0^1, F_1)$ onde $\delta : Q_1 \times I' \to Q_1$ é tal que $\delta(q,i)$ é igual a $\delta_1(q,i)$ se $i \in I$ e $\delta(q,i)$ não está definido se $i \notin I$. Como facilmente se conclui, $L_{D_1} = L_D$ e δ não é uma aplicação. Obtém-se o autómato pretendido partindo de D e procedendo como acima.

NOTA: Poder-se-ia também não considerar o caso especial de δ_1 ser uma aplicação e apresentar apenas o autómato D apresentado em (ii). ∇

Prova de 3.: $L_{D_1} \cup L_{D_2} = \overline{\overline{L_{D_1}} \cap \overline{L_{D_2}}}$. ∇

Prova de 4.: $L_{D_1} \backslash L_{D_2} = L_{D_1} \cap \overline{L_{D_2}}$. ∇

EXEMPLO: Definir um autómato finito determinista cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's com um número ímpar de b's e que entre dois a's consecutivos tenham no máximo um b.

Tendo em conta o resultado apresentado, obtém-se um autómato para a linguagem referida a partir de (i) um autómato D_1 cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's que entre dois a's consecutivos tenham no máximo um b e de (ii) um autómato D_2 cuja linguagem seja formada pelas sequências de a's e b's com um número ímpar de b's, da seguinte forma. Sendo

- $D_1 = (Q_1, I, \delta_1, q_0^1, F_1)$
  - $Q_1 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

- $I = \{a, b\}$
- $q_0^1 = q_0$
- $F_1 = Q_1$
- $\delta_1 : Q_1 \times I \to Q_1$ tal que

δ_1	a	b
q_0	q_1	q_0
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	nd	q_3

- $D_2 = (Q_2, I, \delta_2, q_0^2, F_2)$
  - $Q_2 = \{r_0, r_1\}$
  - $I = \{a, b\}$
  - $q_0^2 = r_0$
  - $F_2 = \{r_1\}$
  - $\delta_2 : Q_2 \times I \to Q_2$ tal que

δ_2	a	b
r_0	r_0	r_1
r_1	r_1	r_0

o autómato D pretendido é $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ onde

- $Q = Q_1 \times Q_2 = \{(q_0, r_0), (q_0, r_1), (q_1, r_0), (q_1, r_1), (q_2, r_0), (q_2, r_1), (q_3, r_0), (q_3, r_1)\}$
- $I = \{a, b\}$
- $q_0 = (q_0^1, q_0^2) = (q_0, r_0)$
- $F = F_1 \times F_2 = \{(q_0, r_1), (q_1, r_1), (q_2, r_1), (q_3, r_1)\}$
- $\delta : Q \times I \to Q$ tal que

δ	a	b
(q_0, r_0)	(q_1, r_0)	(q_0, r_1)
(q_0, r_1)	(q_1, r_1)	(q_0, r_0)
(q_1, r_1)	(q_1, r_1)	(q_2, r_0)
(q_1, r_0)	(q_1, r_0)	(q_2, r_1)
(q_2, r_0)	(q_1, r_0)	(q_3, r_1)
(q_2, r_1)	(q_1, r_1)	(q_3, r_0)
(q_3, r_0)	nd	(q_3, r_1)
(q_3, r_1)	nd	(q_3, r_0)

EXEMPLO: Definir um autómato finito determinista cuja linguagem seja o conjunto das sequências de 0's e 1's distintas de 11 e de 111.

Tendo em conta o resultado apresentado e tendo em conta que um autómato com conjunto de entrada $I = \{0, 1\}$ e cuja linguagem é $\{11, 111\}$ é $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ tal que

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $F = \{q_2, q_3\}$
- $\delta : Q \times I \to Q$ tal que

δ	0	1
q_0	nd	q_1
q_1	nd	q_2
q_2	nd	q_3
q_3	nd	nd

tem-se que o autómato D' pedido é $D' = (Q', I, \delta', q'_0, F')$, onde, dado que δ não é uma função total,

- $Q' = Q \cup \{q\} = \{q, q_0, q_1, q_2, q_3\}$
- $I = \{0, 1\}$
- $q'_0 = q_0$
- $F' = (Q \backslash F) \cup \{q\} = \{q, q_0, q_1\}$
- $\delta' : Q' \times I \to Q'$ tal que

δ'	0	1
q_0	q	q_1
q_1	q	q_2
q_2	q	q_3
q_3	q	q
q	q	q