PROPOSIÇÃO: *Seja $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$ um autómato finito determinista. Existem algoritmos que permitem determinar se são ou não verdadeiras as seguintes asserções*[1]

1. $L_D = \emptyset$.
2. $L_D = I^*$.
3. $L_D \subseteq L_{D'}$ *onde* D' *é um outro autómato finito determinista.*
4. $L_D = L_{D'}$ *onde* D' *é um outro autómato finito determinista.*
5. *Existe um autómato finito determinista* D' *com menos estados que* D *e tal que* $L_D = L_{D'}$.

Prova de 1.:
Há que encontrar um algoritmo que permita concluir se existe ou não $w \in I^*$ tal que $\delta^*(q_0, w) \in F$ ou, informalmente, há que saber se é ou não possível atingir um estado final a partir do estado inicial q_0. Um algoritmo possível para este fim consiste em partir do estado inicial e considerar sucessivamente os conjuntos

- $\Gamma_0 = \{q_0\}$
- $A_1 = \{q \in Q : \delta(q_0, i) = q$ para algum $i \in I\}$ e
  $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup A_1$
- $A_2 = \{q \in Q : \delta(q', i) = q$ para algum $q' \in A_1$ e para algum $i \in I\}$ e
  $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup A_2$
- ...
- $A_{k+1} = \{q \in Q : \delta(q', i) = q$ para algum $q' \in A_k$ e para algum $i \in I\}$ e
  $\Gamma_{k+1} = \Gamma_k \cup A_{k+1}$
- ...

até que exista um $j \geq 1$ tal que $A_j \cap F \neq \emptyset$ ou tal que $\Gamma_j = \Gamma_{j-1}$. No primeiro caso, L_D não é a linguagem vazia e no segundo caso (se $\Gamma_j \cap F = \emptyset$) L_D é a linguagem vazia. Note-se que, neste segundo caso, o conjunto Γ_j $(= \Gamma_{j-1})$ é o conjunto de todos os estados acessíveis a partir do estado inicial, ou seja, $\Gamma_j = \{q \in Q : \text{existe } w \in I^* \text{ tal que } \delta^*(q_0, w) = q\}$.

O algoritmo acima descrito termina porque:

(i) como os vários conjuntos envolvidos (Q, I, F) são finitos é possível em tempo finito e para cada $k > 0$

  – construir A_k e Γ_k

[1] A existência destes algoritmos permite dizer que estas asserções (ou propriedades) são *decidíveis*.

– determinar se A_k contém um estado final ou $\Gamma_k = \Gamma_{k-1}$;

(ii) $\Gamma_0 \subseteq Q$ e, para cada $k > 0$, $\Gamma_{k-1} \subseteq \Gamma_k$ e $\Gamma_k \subseteq Q$, pelo que não é possível prosseguir a construção dos vários conjuntos sem que a dada altura se encontre $j \geq 0$ tal que $\Gamma_j = \Gamma_{j-1}$ pois Q é finito.

Prova de 2.:
Constrói-se o autómato $\overline{D}$ cuja linguagem reconhecida é $I^*\backslash L_D$ (do modo atrás referido) e, usando o algoritmo descrito em 1., testa-se se $I^*\backslash L_D = \emptyset$. Em caso afirmativo, $L_D = I^*$. Caso contrário, $L_D \neq I^*$.

Tem-se que $I^*\backslash L_D = \emptyset$ sse $L_D = I^*$:

$$\begin{gathered} I^*\backslash L_D = \emptyset \\ \text{sse} \\ \text{para cada } w \in I^* \text{ se tem que } w \in L_D \\ \text{sse} \\ I^* \subseteq L_D \\ \text{sse (porque } L_D \subseteq I^*) \\ I^* = L_D. \end{gathered}$$

Prova de 3.:
Como já foi antes referido, pode assumir-se sem perda de generalidade que $I = I'$. Assim, procedendo como se viu anteriormente, constrói-se o autómato D'' cuja linguagem reconhecida é $L_D\backslash L_{D'}$ e, usando o algoritmo descrito em 1., testa-se se $L_D\backslash L_{D'} = \emptyset$. Em caso afirmativo, $L_D \subseteq L_{D'}$. Caso contrário, $L_D \not\subseteq L_{D'}$.

Tem-se que $L_D\backslash L_{D'} = \emptyset$ sse $L_D \subseteq L_{D'}$:

$$\begin{gathered} L_D\backslash L_{D'} = \emptyset \\ \text{sse} \\ \text{para cada } w \in L_D \text{ se tem que } w \in L_{D'} \\ \text{sse} \\ L_D \subseteq L_{D'}. \end{gathered}$$

Prova de 4.:
Existem vários algoritmos possíveis para resolver esta questão.

A. Uma possibilidade é testar, usando o modo descrito em 3., se $L_D \subseteq L_{D'}$ e $L_{D'} \subseteq L_D$. Em caso afirmativo, $L_D = L_{D'}$. Caso contrário, $L_D \neq L_{D'}$.

B. Uma outra possibilidade, que no fundo é equivalente à anterior, consiste em construir, do modo anteriormente descrito, um autómato D'' cuja linguagem reconhecida seja $((I^*\backslash L_D)\cap L_{D'})\cup((I^*\backslash L_{D'})\cap L_D)$ e testar se $L_{D''}=\emptyset$. Em caso afirmativo[2], $L_D = L_{D'}$. Caso contrário, $L_D \neq L_{D'}$.

C. Existe ainda um modo mais expedito que será descrito mais adiante.

Prova de 5.:
A prova será apresentada mais adiante.

[2]Note-se que $(I^*\backslash L_D)\cap L_{D'}$ é o conjunto dos elementos de $L_{D'}$ que não pertencem a L_D. De modo análogo $(I^*\backslash L_{D'})\cap L_D$ é o conjunto dos elementos de L_D que não pertencem a $L_{D'}$. Se ambos estes conjuntos são vazios é porque não existem sequências reconhecidas por L_D que não sejam reconhecidas por $L_{D'}$ e vice-versa. Assim, necessariamente, $L_D = L_{D'}$.