Teoria da Computação
Resolução do Exame 1 - Versão A (LEIC-Alameda)
2003/2004

Grupo 1:

1.1
a) $D = (Q, I, \delta, q_0, F)$

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4.q_5, q_6\}$
- $I = \{a, b\}$
- $F = \{q_3, q_4\}$
- $\delta : Q \times I \to Q$ tal que

δ	a	b
q_0	q_1	q_6
q_1	q_2	nd
q_2	q_2	q_3
q_3	q_4	q_5
q_4	q_2	q_3
q_5	q_4	q_5
q_6	nd	q_5

b)
$\delta^*(q_0, bba) =$
$\delta(\delta^*(q_0, bb), a) =$
$\delta(\delta(\delta^*(q_0, b), b), a) =$
$\delta(\delta(\delta(\delta^*(q_0, \epsilon), b), b), a) =$
$\delta(\delta(\delta(q_0, b), b), a) =$
$\delta(\delta(q_6, b), a) =$
$\delta(q_5, a) = q_4$

Como $\delta^*(q_0, bba) = q_4$ e $q_4 \in F$, $bba \in L_D$.

c) O autómato D não tem estado inúteis. Assim, para saber se existe um autómato finito determinista com menos estados que D que reconheça exactamente L_D, há que determinar se existem pares de estados equivalentes em D. Para tal utiliza-se o algoritmo de procura exaustiva de pares distinguíveis. A função δ não é total mas todos os estados são, em particular, produtivos pelo que o algoritmo pode ser utilizado. Constrói-se então a tabela seguinte:

q_1	$\surd_2$					
q_2	$\surd_4$	$\surd_2$				
q_3	$\surd_1$	$\surd_1$	$\surd_1$			
q_4	$\surd_1$	$\surd_1$	$\surd_1$	$\surd_7$		
q_5	$\surd_5$	$\surd_2$	$\surd_6$	$\surd_1$	$\surd_1$	
q_6	$\surd_3$	$\surd_2$	$\surd_3$	$\surd_1$	$\surd_1$	$\surd_3$
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5

- Passo inicial
  - $q_3, q_4 \in F$, logo q_3, q_4 são distinguíveis de todos os outros estados não finais, isto é, são distinguíveis de q_0, q_1, q_2, q_5, q_6 ($\surd_1$ na tabela)
  - $\delta(q_1, b)$ não está definido e $\delta(p, b)$ está definido para cada $p \in Q\backslash\{q_1\}$, logo q_1 é distinguível de todos os outros estados ($\surd_2$ na tabela)
  - $\delta(q_6, a)$ não está definido e $\delta(p, a)$ está definido para cada $p \in Q\backslash\{q_6\}$ logo q_6 é distinguível de todos os outros estados ($\surd_3$ na tabela)

- Passo iterativo
  - q_1 e q_2 são distinguíveis e $\delta(q_0, a) = q_1$ e $\delta(q_2, a) = q_2$, logo q_0 e q_2 são distinguíveis ($\surd_4$ na tabela)
  - q_1 e q_4 são distinguíveis e $\delta(q_0, a) = q_1$ e $\delta(q_5, a) = q_4$, logo q_0 e q_5 são distinguíveis ($\surd_5$ na tabela)
  - q_2 e q_4 são distinguíveis e $\delta(q_2, a) = q_4$ e $\delta(q_5, a) = q_4$, logo q_2 e q_5 são distinguíveis ($\surd_6$ na tabela)
  - q_3 e q_5 são distinguíveis e $\delta(q_3, b) = q_5$ e $\delta(q_4, b) = q_3$, logo q_3 e q_4 são distinguíveis ($\surd_7$ na tabela)

Como todos os pares de estados foram já identificados como distinguíveis, o algoritmo termina. Dado que não há pares de estados equivalentes, não existe nenhum autómato finito determinista com menos estados que D que reconheça exactamente L_D.

1.2

a) $G = (V, I, P, S)$ onde

- $V = \{S, A, B\}$
- $I = \{0, 1, 2\}$
- $P ::$ $\begin{array}{l} S \rightarrow 1B \\ A \rightarrow 0A \mid 2A \mid 1B \mid \epsilon \\ B \rightarrow 1A \mid 0B \mid 2B \end{array}$

b)

$$\begin{cases} S = 1B \\ A = 0A + 2A + 1B + \epsilon \\ B = 1A + 0B + 2B \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 1B \\ A = 0A + 2A + 1B + \epsilon \\ B = (0+2)B + 1A \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 1B \\ A = (0+2)A + 1B + \epsilon \\ B = (0+2)^*1A \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 1B \\ A = (0+2+1(0+2)^*1)A + \epsilon \\ B = (0+2)^*1A \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 1B \\ A = (0+2+1(0+2)^*1)^*\epsilon \\ B = (0+2)^*1A \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = 1(0+2)^*1(0+2+1(0+2)^*1)^* \\ A = (0+2+1(0+2)^*1)^*\epsilon \\ B = (0+2)^*1(0+2+1(0+2)^*1)^* \end{cases}$$

A expressão regular pedida é $1(0+2)^*1(0+2+1(0+2)^*1)^*$.

c) Tendo em conta os algoritmos estudados tem-se que

- $A = (Q, I, \delta, q_0, F)$ com
  - $Q = V = \{S, A, B\}$
  - $q_0 = S$
  - $F = \{A\}$
  - $\delta : Q \times I \to 2^Q$ tal que

δ	0	1	2
S	$\emptyset$	$\{B\}$	$\emptyset$
A	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{A\}$
B	$\{B\}$	$\{A\}$	$\{B\}$

- como em A não existe $p \in Q$ e $i \in I$ tal que $\delta(p, i) = S$, de acordo com o algoritmo estudado, pode considerar-se $A' = (Q', I, \delta', q_0', F')$ com
  - $Q' = Q = \{S, A, B\}$
  - $q_0' = q_0 = S$
  - $F' = \{S, A\}$

– $\delta' : Q' \times (I \cup \{\epsilon\}) \to 2^{Q'}$ tal que

δ'	0	1	2	ϵ
S	$\emptyset$	$\{B\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
A	$\{A\}$	$\{B\}$	$\{A\}$	$\{S\}$
B	$\{B\}$	$\{A\}$	$\{B\}$	$\emptyset$

1.3 A expressão regular pedida é
$x + y + z + xx + xx^*y(x^*y + z)^*x^*x + y(x^*y + z)^*x^*y + z(x^*y + z)^*z.$

1.4
a) A função ternária calculada pelo programa é a função

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z & \text{se } y + 2 = z \\ z - x + 2 & \text{se } y + 2 \neq z \text{ e } x \geq z + 1 \\ \text{não definida} & \text{se } y + 2 \neq z \text{ e } x < z + 1 \end{cases}$$

Havia que fazer o fluxograma correspondente ao programa.

b) Uma possível solução é
1. G[2, 3]
2. G[2, 4]
3. J[1, 2, 11]
4. S[2]
5. G[2, 5]
6. MIN[4, 5, 4]
7. MIN[3, 5, 6]
8. J[6, 5, 10]
9. COPY[5, 3]
10. JUMP[1, 1, 3]
11. SUB[3, 4, 1]
12. HALT[]

c) Pretende-se calcular $\gamma^{-1}(20608)$ (ou seja o programa $P =< p_1, \ldots, p_n >$ tal que $\gamma(P) = \tau(\beta(p_1), \ldots, \beta(p_n)) = 20608$):

- Cálculo de $\tau^{-1}(20608)$: $20608 \stackrel{+1}{\rightarrow} 20609 = 2^0 + 2^7 + 2^{12} + 2^{14}$ o que significa que
  - P tem quatro comandos
  - $b_1 = 0$, $b_2 = 7$, $b_3 = 12$ e $b_4 = 14$ logo
    - $a_1 = b_1 = 0$
    - $a_2 = b_2 - b_1 - 1 = 6$
    - $a_3 = b_3 - b_2 - 1 = 4$
    - $a_4 = b_4 - b_3 - 1 = 1$

e portanto $\tau^{-1}(20608) = (0, 6, 4, 1)$ o que significa que
$\gamma^{-1}(20608) = (\beta^{-1}(0), \beta^{-1}(6), \beta^{-1}(4), \beta^{-1}(1))$

- Cálculo de $\beta^{-1}(0)$: $0 = 4 \times u + v = 4 \times 0 + 0$ logo
  - como $v = 0$ o comando é de tipo Z
  - como $u = 0$ o comando é $Z(1)$ (ou seja, $Z(u + 1)$)
- Cálculo de $\beta^{-1}(6)$: $6 = 4 \times u + v = 4 \times 1 + 2$ logo
  - como $v = 2$ o comando é de tipo T
  - como $u = 1$ o comando é $T(m, n)$ onde $m = \pi_1(1)+1$ e $n = \pi_2(1)+1$ que se calculam da seguinte forma
    - cálculo de $\pi_1(1)$ e $\pi_2(1)$: $1 \xrightarrow{+1} 2 = 2^1 \times 1$

    $$1 \longleftarrow 2^1 \times 1 \longrightarrow (1 - 1)/2 = 0$$

    e portanto
    $\pi_1(1) = 1$
    $\pi_2(1) = 0$
    o que significa que $m = 2$ e $n = 1$
- Cálculo de $\beta^{-1}(4)$: $4 = 4 \times u + v = 4 \times 1 + 0$ logo
  - como $v = 0$ o comando é de tipo Z
  - como $u = 1$ o comando é $Z(2)$
- Cálculo de $\beta^{-1}(1)$: $1 = 4 \times u + v = 4 \times 0 + 1$ logo
  - como $v = 1$ o comando é de tipo S
  - como $u = 0$ o comando é $S(1)$

Conclui-se assim que $\gamma^{-1}(20608) =< Z(1), T(2, 1), Z(2), S(1) >$.

Grupo 2:
2.1 O autómato é $D = (Q_D, I, \delta_D, q_D, F_D)$ com

- $Q_D = 2^Q$
- $\delta_D : Q_D \times I \to Q_D$ tal que $\delta_D(q_D, i) = \bigcup_{p \in q_D} \delta(p, i)$
- $q_D = \{q_0\}$
- $F_D = \{q_D \in Q_D : q_D \cap F \neq \emptyset\}$

2.2 Por definição, a função h é definida por recursão a partir de f e g dados se $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, y + 1) = g(x, y, h(x, y))$. Assim:

- $h(x, 0) = f(x) = x$

- $h(x,1) = g(x,0,h(x,0)) = x + 2.0 + 1 = x + 1$
- $h(x,2) = g(x,1,h(x,1)) = x + 1 + 2.1 + 1 = x + 4$
- $h(x,3) = g(x,2,h(x,2)) = x + 4 + 2.2 + 1 = x + 9$
- $\ldots$

pelo que se é levado a afirmar que se terá $h(x,y) = x + y^2$.

Confirmação de que, de facto, $h(x,y) = x + y^2$.

1. Verificar que $h(x,0) = f(x)$:

   - $h(x,0) = x + 0^2 = x$
   - $f(x) = x$

   logo, $h(x,0) = f(x)$.

2. Verificar que $h(x,y+1) = g(x,y,h(x,y))$:

   - $h(x,y+1) = x + (y+1)^2 = x + y^2 + 2y + 1$
   - $g(x,y,h(x,y)) = h(x,y) + 2y + 1 = x + y^2 + 2y + 1$

   logo, $h(x,y+1) = g(x,y,h(x,y))$.

2.3 A função $g : I\!N_0 \to I\!N_0$ tal que

$$g(n) = \begin{cases} \phi_n(n) + 1 & \text{se } \phi_n(n)\downarrow \\ 0 & \text{se } \phi_n(n)\uparrow \end{cases}$$

é uma função total e não é URM-computável.

Prova-se seguidamente que g não é URM-computável, mostrando que $g \neq \phi_k$ para cada $k \in I\!N_0$.

Seja então $k \in I\!N_0$: (i) se $\phi_k(k)\downarrow$ então $g(k) = \phi_k(k) + 1$ e portanto $g(k) \neq \phi_k(k)$; (ii) se $\phi_k(k)\uparrow$ então $g(k) = 0$ e portanto $g(k) \neq \phi_k(k)$. Conclui-se então que as funções g e ϕ_k são diferentes pois atribuem imagens diferentes ao natural k.