INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2011/2012

2º Teste - Versão A

(CURSOS: LEGM, LEMAT, LET, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ)

17 de Dezembro de 2011, 8h,

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere as páginas do seu caderno de respostas e indique, na tabela seguinte, **todas** as páginas da resposta a cada questão.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1) a)		1,5	
1) b)		1,0	
2) a)		1,0	
2) b)		1,0	
3)		2,0	
4) a)		1,0	
4) b)		1,5	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: ______________________________

Nº: ______________________ **Sala:** __________

Curso: ______________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

[1,5 val.] 1. a) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{1+2y}, \qquad y(0) = 0.$$

Determine a solução do problema na forma explícita e indique o seu intervalo máximo de existência.

[1,0 val.] b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$x' = \left(\frac{e^t}{3+e^t}\right) x + e^t.$$

2. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] a) Verifique que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} t+1 & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t) \quad , \quad \mathbf{X}(0) = (1,0) \quad , \quad B(t) = (0, 2e^t)$$

[2,0 val.] 3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y''' - y' = t + \cos t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

4. Considere o seguinte problema de valor inicial e condições na fronteira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - x, & 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Desenvolva $u(x,0)$ numa série de cossenos em $[0,1]$.

[1,5 val.] (b) Resolva formalmente o problema dado.

[1,0 val.] 5. Sendo $y_0 \in [0,1]$, considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)\left(\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2}\right) \quad \text{se } t \in \mathbb{R} \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única, $y(t)$, determinando o seu intervalo máximo de existência e o $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.