Análise Complexa e Equações Diferenciais
1º Semestre 2011/2012

2º Teste - Versão A

(CURSOS: LEGM, LEMAT, LET, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ)

17 de Dezembro de 2011, 8h,

Duração: 1h 30m

[1,5 val.] 1. a) Considere o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x}}{1+2y}, \qquad y(0) = 0.$$

Determine a solução do problema na forma explícita e indique o seu intervalo máximo de existência.

[1,0 val.] b) Determine a solução geral da equação diferencial

$$x' = \left(\frac{e^t}{3+e^t}\right) x + e^t.$$

Resolução:

(a) A equação diferencial escreve-se na forma

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

com $f(y) = 1 + 2y$ e $g(x) = e^{2x}$. Trata-se de uma equação separável com solução geral dada por

$$P\left[1+2y\right] = P\left[e^{2x}\right] + C \Leftrightarrow y + y^2 = \tfrac{1}{2}e^{2x} + C$$

onde C é uma constante real. Da condição inicial $y(0) = 0$ decorre o valor $C = -\frac{1}{2}$ e a forma implícita da solução do problema de valor inicial

$$y^2 + y + \tfrac{1}{2}(1 - e^{2x}) = 0.$$

Consequentemente a forma explícita da solução do problema é

$$y(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2e^{2x} - 1}, \qquad \text{para } x \in I,$$

onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $0 \in I$. O intervalo máximo de existência da solução I_{max} é determinado por

$$2e^{2x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq \log(\tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow x \geq -\tfrac{1}{2}\log 2,$$

e portanto $I_{max} =] -\frac{1}{2}\log 2, +\infty[$.

(b) A equação dada é linear com factor integrante $\mu = \mu(t)$ tal que

$$x' = \left(\frac{e^t}{3+e^t}\right)x + e^t \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\mu(t)x(t)\right) = \mu(t)e^t.$$

Assim temos

$$\mu(t) = e^{P\left[-e^t/(3+e^t)\right]} = e^{-\log(3+e^t)} = \frac{1}{3+e^t}$$

e para a solução geral da equação diferencial

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\mu(t)}\left(C + P\left[\mu(t)e^t\right]\right) = (3+e^t)\left(C + P\left[\frac{e^t}{3+e^t}\right]\right) \\ &= (3+e^t)\left(C + \log(3+e^t)\right) \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$.

2. Sendo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] a) Verifique que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} t+1 & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + B(t) \quad , \quad \mathbf{X}(0) = (1,0) \quad , \quad B(t) = (0, 2e^t)$$

Resolução:

(a) Denominando as colunas da matriz dada por $X_i(t)$, $i = 1, 2$, e atendendo à unicidade de solução do (PVI)$_i$

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \qquad , \qquad \mathbf{X}(0) = e_i$$

(em que $e_i,\ i = 1,\ 2$ são os vectores da base de $\mathbb{R}^2$), para que a matriz dada seja e^{At} é suficiente mostrar que a função $X_i(t)$ é solução do respectivo (PVI)$_i$. É fácil de verificar que $X_1(0) = (1,0)$ e $X_2(0) = (0,1)$ pelo que as colunas da matriz dada verificam as respectivas condições iniciais. Por outro lado

$$\frac{d}{dt}\left(e^t\begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix}\right) = e^t\begin{bmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{bmatrix} \quad , \quad AX_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} t+2 \\ -t-1 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{d}{dt}\left(e^t\begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix}\right) = e^t\begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix} \quad , \quad AX_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} t \\ 1-t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} t+1 \\ -t \end{bmatrix}$$

pelo que $X_i(t)$ verificam a equação diferencial. Conclui-se que a matriz dada é e^{At}.

(b) Usando a fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= e^{At}\left(\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{-As}B(s)\,ds\right) \\ &= e^{At}\left(\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{-s}\begin{bmatrix} -s+1 & -s \\ s & 1+s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2e^s \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^{At}\left(\mathbf{X}(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} -2s \\ 2+2s \end{bmatrix} ds\right) \\ &= e^t \begin{bmatrix} t+1 & t \\ -t & 1-t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-t^2 \\ 2t+t^2 \end{bmatrix} = e^t\begin{bmatrix} 1+t+t^2 \\ t-t^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

[2,0 val.] 3. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y''' - y' = t + \cos t, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Resolução: Uma vez que $D(D^2+1)(t+\cos t) = 0$, temos que $y(t)$ é uma solução da equação homogénea

$$D(D^2+1)(D^3 - D)y = 0 \Leftrightarrow D^3(D^2+1)(D-1)(D+1)y = 0.$$

Portanto $y(t)$ é da forma

$$y(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t + c_6 e^t + c_7 e^{-t}$$

com $c_i \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação inicial (e notando que os termos com coeficientes c_1, c_6 e c_7 são soluções da equação homogénea associada) temos

$$\begin{aligned}
(D^3 - D)(c_2 t + c_3 t^2 + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t) &= t + \cos t \\
c_4 \operatorname{sen} t - c_5 \cos t - (c_2 + 2c_3 t - c_4 \operatorname{sen} t + c_5 \cos t) &= t + \cos t \\
-c_2 - 2c_3 t + 2c_4 \operatorname{sen} t - 2c_5 \cos t &= t + \cos t
\end{aligned}$$

Pelo que $c_2 = 0,\ c_3 = -\frac{1}{2},\ c_4 = 0$ e $c_5 = -\frac{1}{2}$. A solução geral da equação diferencial é portanto

$$y(t) = c_1 + c_6 e^t + c_7 e^{-t} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$$

Substituindo nas condições iniciais $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_6 + c_7 = 0 \\ c_6 - c_7 - \frac{1}{2} = 0 \\ c_6 + c_7 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_6 = \frac{3}{4} \\ c_7 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

donde se conclui que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = -1 + \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} t.$$

4. Considere o seguinte problema de valor inicial e condições na fronteira:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = 1 - x, & 0 \le x \le 1; \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Desenvolva $u(x,0)$ numa série de cossenos em $[0,1]$.

[1,5 val.] (b) Resolva formalmente o problema dado.

Resolução:

(a) Os coeficientes da série de cossenos de $1-x$ em $[0,1]$ são

$$a_0 = 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 1$$

e, para $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
a_n &= 2\int_0^1 (1-x)\cos(n\pi x)\,dx \\
&= 2\left\{\left[\frac{(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)}{n\pi}\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{1}{n\pi}\int_0^1 \operatorname{sen}(n\pi x)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{n\pi}\left[-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{(n\pi)^2}(1 - \cos(n\pi)).
\end{aligned}$$

Logo,

$$u(x,0) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos(n\pi)}{n^2}\cos(n\pi x) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos((2k-1)\pi x)$$

(b) Consideremos primeiro soluções da equação diferencial parcial do tipo $u = T(t)X(x)$. Substituindo na equação obtemos $T'X = 4TX''$, ou seja $\frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X} = \sigma$, onde σ é uma constante real dado que o primeiro membro é independente de x e o segundo é independente de t. Logo,

$$\begin{cases} T'(t) - 4\sigma T(t) = 0 \\ X''(x) - \sigma X(x) = 0\,. \end{cases}$$

Consoante o sinal da constante σ a equação diferencial de segunda ordem em $X(x)$ tem as soluções

$$X(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x} & \text{se } \sigma > 0 \\ a + bx & \text{se } \sigma = 0 \\ a\cos(\sqrt{-\sigma}x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\sigma}x) & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

Aplicando as condições na fronteira em $x = 0, 1$ obtemos $X'(0) = X'(1) = 0$. Vejamos o que isto implica para cada um dos casos anteriores:
Caso $\sigma > 0$:

$$\begin{cases} a\sqrt{\sigma} - b\sqrt{\sigma} = 0 \\ a\sqrt{\sigma}e^{\sqrt{\sigma}} - b\sqrt{\sigma}e^{-\sqrt{\sigma}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a(e^{\sqrt{\sigma}} - e^{-\sqrt{\sigma}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(x) \equiv 0$$

Caso $\sigma = 0$:

$$b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = a \text{ (constante arbitrária)}.$$

Caso $\sigma < 0$:

$$\begin{cases} b\sqrt{-\sigma} = 0 \\ -a\sqrt{-\sigma}\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\sigma}) + b\sqrt{-\sigma}\cos(\sqrt{-\sigma}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a\,\mathrm{sen}(\sqrt{-\sigma}) = 0 \end{cases}$$

e, neste último caso, ou $a = b = 0$, dando novamente a solução $X(x) \equiv 0$, ou $b = 0$ com $\sigma = -(n\pi)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e neste caso obtemos as soluções não identicamente nulas $X(x) = a\cos(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Resolvendo a equação para $T(t)$ com estes valores de σ obtemos $T(t) = ce^{-4(n\pi)^2 t}$. Procuremos então a solução do problema como uma série de funções do tipo $T(t)X(x) = a_n e^{-4(n\pi)^2 t}\cos(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$, e $T(t)X(x) = a_0/2$ (correspondente a $\sigma = 0$):

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-4(n\pi)^2 t}\cos(n\pi x)\,.$$

Dado que $u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(n\pi x) = 1 - x$, deduzimos que a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ são os coeficientes da série de cossenos calculada na alínea anterior pelo que a solução (formal) do problema dado é

$$u(x,t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}e^{-4((2k-1)\pi)^2 t}\cos((2k-1)\pi x)\,.$$

[1,0 val.] 5. Sendo $y_0 \in [0, 1]$, considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y(y-1)\big(\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2}\big) \quad \text{se } t \in \mathbb{R} \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única, $y(t)$, determinando o seu intervalo máximo de existência e o $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)$.

Resolução:

A função $g(y,t) = y(y-1)\big(\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2}\big)$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, estando por isso nas condições do teorema de Picard-Lindelöf. Desta forma, para todos os t_0 e y_0 em $\mathbb{R}$, o problema de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-1)\big(\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2}\big) \\ \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \tag{1}$$

tem solução única, definida numa vizinhança de t_0. No caso presente, para $t_0 = 0$ e $y_0 \in [0,1]$, seja $y(t)$ a solução de (1). Se $0 \le y(t) \le 1$, então:

$$y(y-1)\big(\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2}\big) \le 0 \Rightarrow y'(t) \le 0$$

ou seja, $y(t)$ é decrescente sempre que $y(t) \in [0,1]$.

Vejamos que não podemos ter $y(t) \notin [0,1]$. Por continuidade da solução, basta provar que não existe $\bar{t} > 0$ tal que $y(\,\bar{t}\,) = 0$ ou $y(\,\bar{t}\,) = 1$. Admitindo que a solução do PVI intersecta a recta $y = 0$ em $\bar{t} > 0$, então como $y(t) = 0$ é solução do problema (1) com $t_0 = \bar{t}$ e $y_0 = 0$, tanto $y(t)$ como $y(t) \equiv 0$ são soluções desse problema, o que contradiz a unicidade de solução. Identicamente se mostra que a solução do PVI não intersecta a recta $y = 1$. Conclui-se então, por continuidade e monotonia de $y(t)$, que:

$$0 \ge y(t) \ge y_0 \ge 0 \qquad \text{para qualquer} \qquad t \ge 0 \tag{2}$$

Pelo teorema de extensão de solução, isto implica que $y(t)$ está definida para qualquer $t \ge 0$.

Se $y_0 = 1$ então a solução é $y(t) \equiv 1$, pelo que $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 1$.

Para determinar o limite no caso em que $0 \le y_0 < 1$, usamos o teorema de comparação de soluções. Atendendo a que $y(t) \le 1$, para $t \ge 0$),

$$\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2} \ge e^{t^2-y^2} \ge e^{t^2-1} \ge \frac{1}{e}.$$

Como $y(t)\big(y(t)-1\big) \le 1$,

$$g(y,t) = y(y-1)\big(\cos^2(t+y) + e^{t^2-y^2}\big) \le y(y-1)\,\frac{1}{e} \le \frac{y_0-1}{e}\,y$$

A (única) solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} u' = -\dfrac{1-y_0}{e}\,u \\ \\ u(0) = y_0 \end{cases}$$

é $u(t) = y_0\, e^{-\frac{1-y_0}{e}t}$. Pelo teorema de comparação de soluções, $y(t) \le y_0 e^{-\frac{1-y_0}{e}t}$ e $\lim_{t\to+\infty} y_0\, e^{-\frac{1-y_0}{e}t} = 0$. (Note que $1 - y_0 > 0$). Como $0 < y(t) \le y_0\, e^{-\frac{1-y_0}{e}t}$ para $t \ge 0$, resulta que:

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0.$$