Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre de 2011/2012

1º Teste - Versão A

(Cursos: LEGM, LEMat, LET, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ)

5 de Novembro de 2011, 8h,

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- NÃO é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

Pergunta	cotação	classificação
1) a)	1,0	
1) b)	1,0	
2)	1,0	
3) a)	1,0	
3) b)	0,5	
4) a)	2,0	
4) b)	1,0	
5)	1,5	
6)	1,0	
Total	10	

Nome: ____

Número:______________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere a função $v(x,y) = \cosh(\alpha x)\cos y + \beta x^2 + y^2$, onde α, β são números reais.

[1,0 val.] (a) Determine todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $v(x,y)$ é a parte imaginária de uma função analítica em $\mathbb{C}$.

[1,0 val.] (b) Tomando $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, determine uma função analítica f tal que $\mathrm{Im}(f) = v$ e $f(0) = 1 + i$.

[1,0 val.] 2. Calcule o integral

$$\oint_{|z|=10} \frac{z^3 + z^2 + e^z}{(z-1)^{997}} dz$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

3. Considere a função $f\colon \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ definida pela expressão

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)^2}$$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z_0 = 0$, indicando a respectiva região de convergência.

[0,5 val.] (b) Sem calcular o desenvolvimento, indique justificando a região de convergência do desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em torno do ponto $z_0 = 2i$ que converge em $z = 3$.

4. Para $z \in \mathbb{C}$, considere a função definida pela seguinte expressão

$$f(z) = \frac{z - \pi i}{e^z + 1} + \frac{1}{(z + \pi i)^2} + z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

[2,0 val.] (a) Classifique as singularidades de $f(z)$ e calcule os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o integral $\oint_{|z|=4} f(z)dz$ onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

[1,5 val.] 5. Use o Teorema dos Resíduos para calcular o integral real

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx.$$

[1,0 val.] 6. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C}$. Supondo que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Re}(f(z)) < M$ para todo o $z \in \mathbb{C}$, mostre que f é constante. *Sugestão: Considere a função* $e^{f(z)}$.