Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1^{o} Semestre de 2011/2012

1^{o} Teste - Versão A

(CURSOS: LEGM, LEMAT, LET, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ)

5 de Novembro de 2011, 8h,

Duração: 1h 30m

1. Considere a função $v(x,y) = \cosh(\alpha x)\cos y + \beta x^2 + y^2$, onde α, β são números reais.

   (a) Determine todos os $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $v(x,y)$ é a parte imaginária de uma função analítica em $\mathbb{C}$.

   (b) Tomando $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, determine uma função analítica f tal que $\mathrm{Im}(f) = v$ e $f(0) = 1 + i$.

   Resolução:

   (a) v é a parte imaginária de uma função analítica em $\mathbb{C}$ sse é uma função harmónica, isto é, se $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x,y) = 0$. Temos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \alpha^2 \cosh(\alpha x)\cos y + 2\beta, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\cosh(\alpha x)\cos y + 2$$

   portanto v é harmónica sse

$$(\alpha^2 - 1)\cosh(\alpha x)\cos y + 2(\beta + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \pm 1 \text{ e } \beta = -1.$$

   (b) Para que $f = u + iv$ seja analítica é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cosh x \cos y - x^2 + y^2\right) = -\cosh x \,\mathrm{sen}\, y + 2y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\cosh x \cos y - x^2 + y^2\right) = -\mathrm{senh}\, x \cos y + 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = -\mathrm{senh}\, x \,\mathrm{sen}\, y + 2xy + A(y) \\ -\mathrm{senh}\, x \cos y + 2x + A'(y) = -\mathrm{senh}\, x \cos y + 2x \end{cases}$$

   Da segunda equação conclui-se que $A'(y) = 0$ pelo que $A(y)$ é constante. Como $f(0) = 1 + i$, tem-se $u(0,0) = 1 \Leftrightarrow A(y) = 1$ e portanto

$$f(x + iy) = -\mathrm{senh}\, x \,\mathrm{sen}\, y + 2xy + 1 + i(\cosh x \cos y - x^2 + y^2).$$

2. Calcule o integral

$$\oint_{|z|=10} \frac{z^3+z^2+e^z}{(z-1)^{997}} dz$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução: Pelo Teorema de Cauchy, o integral em questão é igual ao integral da mesma função sobre uma circunferência centrada em 1 (percorrida uma vez no sentido horário). A fórmula integral de Cauchy para a derivada de ordem 996 garante então que

$$\oint_{|z|=10} \frac{z^3+z^2+e^z}{(z-1)^{997}} dz = -\frac{2\pi i}{996!} f^{(996)}(1)$$

onde $f(z) = z^3+z^2+e^z$ e o sinal se deve ao facto de o sentido do caminho de integração ser o anti-directo. Uma vez que $f^{(k)}(z) = e^z$ para $k \geq 4$ conclui-se que

$$\oint_{|z|=10} \frac{z^3+z^2+e^z}{(z-1)^{997}} dz = -\frac{2\pi e i}{996!}.$$

3. Considere a função $f\colon \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ definida pela expressão

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)^2}$$

(a) Determine o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z_0 = 0$, indicando a respectiva região de convergência.

(b) Sem calcular o desenvolvimento, indique justificando a região de convergência do desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em torno do ponto $z_0 = 2i$ que converge em $z = 3$.

Resolução:

(a) Pela fórmula para a soma de uma série geométrica temos

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{z}{2}\right)^n \text{ para } \left|\frac{z}{2}\right| < 1 \Leftrightarrow |z| < 2$$

logo

$$\begin{aligned} z\frac{1}{(z-2)^2} = z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2-z}\right) &= z\frac{d}{dz}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}\right) \text{ para } |z| < 2 \\ &= z\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^n}{2^{n+1}}\right) \text{ para } |z| < 2 \end{aligned}$$

pelo que

$$z\frac{1}{(z-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}} z^n \text{ para } |z| < 2.$$

(b) A função $f(z)$ é analítica em $\mathbb{C}\setminus\{2\}$ logo tem um único desenvolvimento de Laurent em série de potências de $(z-2i)$ que converge para $f(z)$ quando $|2-2i| = 2\sqrt{2} < |z-2i| < +\infty$ e, em particular, quando $z = 3$. Este desenvolvimento não converge em nenhum ânulo aberto maior porque $\lim\limits_{\substack{z\to 2i \\ |z-2i|<2\sqrt{2}}} f(z) = \infty$ e a soma de uma série de potências é uma função contínua no interior da região de convergência. Conclui-se que a região de convergência do desenvolvimento pretendido é

$$\{z \in \mathbb{C} \colon |z-2i| > 2\sqrt{2}\}.$$

4. Para $z \in \mathbb{C}$, considere a função definida pela seguinte expressão

$$f(z) = \frac{z-\pi i}{e^z+1} + \frac{1}{(z+\pi i)^2} + z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right).$$

(a) Classifique as singularidades de $f(z)$ e calcule os respectivos resíduos.

(b) Calcule o integral $\oint_{|z|=4} f(z)dz$ onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido directo.

Resolução:

(a) $f(z)$ tem singularidades em $z = 0$, $z = -\pi i$ e nas soluções da equação

$$e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow e^z = e^{i\pi} \Leftrightarrow z \in \{(\pi + 2k\pi)i \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Assim, o conjunto das singularidades é $\{0\} \cup \{(\pi + 2k\pi)i \colon k \in \mathbb{Z}\}$.
Podemos escrever $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z)$ com $f_1(z) = \frac{z-\pi i}{e^z+1}$, $f_2(z) = \frac{1}{(z+\pi i)^2}$ e $f_3(z) = z^5 \cos\left(\frac{1}{z}\right)$.
Como f_1 e f_2 são diferenciáveis numa vizinhança de 0, a parte singular (ou principal) do desenvolvimento de Laurent de f válido perto de 0 coincide com a parte singular do desenvolvimento de Laurent de $f_3(z)$. Temos

$$f_3(z) = z^5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{2n-5}}, \text{ para } z \neq 0,$$

donde se conclui que 0 é uma singularidade essencial (há infinitos termos correspondentes a potências com expoente negativo). O resíduo é o coeficiente da potência $\frac{1}{z}$ que na série acima corresponde ao índice $n = 3$. Vemos assim que

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \mathrm{Res}(f_3, 0) = -\frac{1}{6!}.$$

O ponto $z_0 = \pi i$ é uma singularidade apenas de $f_1(z)$ e

$$\lim_{z\to\pi i} f_1(z) = \lim_{z\to\pi i} \frac{1}{e^z} = -1$$

(onde usámos a regra de Cauchy para calcular o limite). Conclui-se que $z_0 = \pi i$ é uma singularidade removível e portanto $\mathrm{Res}(f(z), \pi i) = \mathrm{Res}(f_1(z), \pi i) = 0$.

Os pontos $z_0 = (2k+1)\pi i$ com $k \neq 0$, são pólos simples de $f_1(z)$ uma vez que, para estes valores de k,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to(2k+1)\pi i}(z-(2k+1)\pi i)f_1(z) &= \lim_{z\to(2k+1)\pi i}\frac{(z-(2k+1)\pi i)(z-\pi i)}{e^z+1}\\ &= \lim_{z\to(2k+1)\pi i}\frac{z-(2k+1)\pi i+z-\pi i}{e^z}\\ &= -2k\pi i\end{aligned}$$

onde, no cálculo do limite usámos a regra de Cauchy.

Se $k \notin \{-1, 0\}$ então $f_1(z)$ é o único termo que tem uma singularidade em $(2k+1)\pi i$ e portanto a singularidade é um pólo simples de $f(z)$ e

$$\mathrm{Res}(f(z), (2k+1)\pi i) = \mathrm{Res}(f_1(z), (2k+1)\pi i) = -2k\pi i.$$

Se $k = -1$, isto é, para $z_0 = -\pi i$, $f_2(z)$ tem um pólo duplo em z_0 e f_3 é diferenciável. Conclui-se que $f(z)$ tem também um pólo duplo em $-\pi i$ e

$$\mathrm{Res}(f(z), -\pi i) = \mathrm{Res}(f_1(z), -\pi i) + \mathrm{Res}(f_2(z), -\pi i) = 2\pi i + 0 = 2\pi i.$$

(b) As singularidades de $f(z)$ na região $|z| < 4$ são 0 e $\pm\pi i$. Pelo Teorema dos resíduos,

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=4} f(z)\,dz &= 2\pi i\left(\mathrm{Res}(f(z), -\pi i) + \mathrm{Res}(f(z), 0) + \mathrm{Res}(f(z), \pi i)\right)\\ &= 2\pi i\left(2\pi i - \frac{1}{6!} + 0\right) = -4\pi^2 - \frac{\pi i}{360}.\end{aligned}$$

5. Use o Teorema dos Resíduos para calcular o integral real

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx.$$

Resolução: Consideremos a curva

$$\gamma_R = [-R, R] \cup C_R$$

onde $[-R, R] = \{x \in \mathbb{R} \colon -R \leq x \leq R\}$ e $C_R = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = R \text{ e } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$.

Então

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx + \int_{C_R} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\,dz. \tag{1}$$

As singularidades de $f(z) = \frac{z^2}{(1+z^2)^2}$ são as soluções de $z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \pm i$. Para $R > 1$, a única singularidade no interior de γ_R é $z = i$. Trata-se de um pólo de ordem 2 com resíduo

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f(z), i) &= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right) \\
&= \lim_{z\to i} \frac{d}{dz}\left(\left(\frac{z}{z+i}\right)^2\right) \\
&= \lim_{z\to i} 2\left(\frac{z}{z+i}\right)\frac{i}{(z+i)^2} = -\frac{i}{4}.
\end{aligned}$$

Tomando o limite quando R tende para infinito na igualdade (1) temos, pelo Teorema dos Resíduos,

$$2\pi i \frac{-i}{4} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\, dz. \tag{2}$$

Como

$$\left|\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right| \leq \frac{|z|^2}{(|z|^2-1)^2} = \frac{R^2}{(R^2-1)^2} \text{ para } z \in C_R, R > 1$$

temos

$$\left|\int_{C_R} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\, dz\right| \leq \int_{C_R} \frac{R^2}{(R^2-1)^2}|dz| = \frac{\pi R^3}{(R^2-1)^2}$$

e portanto

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{z^2}{(1+z^2)^2}\, dz = 0.$$

Assim, obtemos a partir da equação (2)

$$\frac{\pi}{2} = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx + 0,$$

e portanto

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

6. Seja f uma função analítica em $\mathbb{C}$. Supondo que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{Re}(f(z)) < M$ para todo o $z \in \mathbb{C}$, mostre que f é constante. *Sugestão: Considere a função* $e^{f(z)}$.

   Resolução: A função $e^{f(z)}$ é também analítica em $\mathbb{C}$. Uma vez que

   $$\left|e^{f(z)}\right| = \left|e^{\operatorname{Re} f(z) + i \operatorname{Im} f(z)}\right| = e^{\operatorname{Re}(f(z))} \leq e^M \text{ para todo o } z \in \mathbb{C}$$

   vemos que $e^{f(z)}$ é limitada. O Teorema de Liouville garante então que $e^{f(z)}$ é constante. Sendo $e^{f(z)} = A$, e escrevendo $\log$ para o ramo principal do logaritmo temos para cada $z \in \mathbb{C}$, que $f(z) = \log A + 2k\pi i$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Uma vez que f é contínua, k é independente de z e portanto f é constante.