Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2011/2012

Testes de Recuperação/Exame

Versão A

14 de Janeiro de 2012

Cursos: LEGM, LEIC-A, LEMat, LET, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na coluna correspondente as páginas onde as questões estão respondidas.

  A classificação do seu Teste/Exame será feita de acordo com a coluna que preencher.
- **Duração do teste: 1 hora e 30 minutos**.
  Duração do exame: 3 horas.

Pergunta	pág. 1º**TESTE**	pág. 2º **TESTE**	pág. **EXAME**	cotação	classificação
1				2,5	
2				2,0	
3				2,5	
4				2,0	
5				1,0	
6				2.0	
7				2,5	
8				2,0	
9				2,5	
10				1,0	
Total				10+10	

Nome: ____

Nº: ______________________ **Sala:** ______________________

Curso: ______________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1^{o} Teste / Exame (1^{a} parte)

1. Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z) = f(x+iy) = 4x^2 + \alpha(y) + i\beta(x)y$$

em que as funções α e β são reais com segunda derivada contínua.

[1,5 val.] (a) Determine f de modo a que seja inteira e verifique $f(1) = 0$.

[1,0 val.] (b) Calcule

$$\oint_{|z|=2012} \frac{zf(z)}{(z-1)^2}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

2. Considere $f : \mathbb{C} \setminus \{i, 3i\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{2i}{z^2 - 4iz - 3}\ .$$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de $z_0 = i$ convergente em $0 < |z - i| < 2$.

[1,0 val.] (b) Calcule

$$\int_\gamma (z-i) f(z)\, dz$$

em que γ é o caminho parametrizado por $z(t) = 3\cos t + 4i \operatorname{sen} t$, com $t \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

3. Considere a função complexa de variável complexa F definida no seu domínio por

$$F(z) = \frac{1 - \operatorname{sen}(\pi z)}{1 - z - 2z^2} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4z+1}\right).$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de F, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o integral $\oint_C F(z) dz$ onde C é o quadrado de vértices 2, $2i$, -2 e $-2i$, percorrido uma vez no sentido positivo.

[2,0 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+2)\operatorname{sen}(4x)}{9x^2+4} dx.$$

[1,0 val.] 5. Seja γ um caminho fechado simples tal que $[0,1] \subset \operatorname{ext} \gamma$. Se $\log$ representar o valor principal do logaritmo mostre que

$$\oint_\gamma \log\left(1 - \frac{1}{z}\right) dz = 0.$$

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte)

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$(y^3 + xy + 3x^2y^3) - x^2y' = 0, \qquad y(-1) = \frac{1}{2}\,.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ para a equação diferencial.

[1,0 val.] (b) Calcule a solução do PVI dado e indique o seu intervalo máximo de definição.

Sugestão: caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(y) = y^{-3}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] (a) Verifique que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \sinh t \\ 0 & 1 & 0 \\ \sinh t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\ , \quad \mathbf{X}(0) = (0,1,0)$$

onde $\mathbf{B}(t) = (e^t, 0, 0)$.

[2,0 val.] 8. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y''' + y' = t + 6\,\mathrm{sen}(2t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

[1,0 val.] 9. (a) Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento de f em série de cosenos indicando a função para a qual a série converge pontualmente.

[1,5 val.] (b) Determine uma solução $u\colon [0,+\infty[\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ para o seguinte problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2u = 0; \begin{cases} u(x,0) = u(x,\pi) = 0, \quad x \ge 0, \\ u(0,y) = \mathrm{sen}\, y - \mathrm{sen}(2y), \quad 0 \le y \le \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le \pi. \end{cases}$$

[1,0 val.] 10. Determine uma função $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(x,0) = \mathrm{sen}\, x.$$

Sugestão: Considere a mudança de variável $v = x + y$, $w = x - y$.