Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2011/2012

Testes de Recuperação/Exame

Versão B

14 de Janeiro de 2012

Cursos: LEGM, LEIC-A, LEMat, LET, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na coluna correspondente as páginas onde as questões estão respondidas.

  A classificação do seu Teste/Exame será feita de acordo com a coluna que preencher.
- **Duração do teste: 1 hora e 30 minutos**.

  Duração do exame: 3 horas.

Pergunta	pág. 1º**TESTE**	pág. 2º **TESTE**	pág. **EXAME**	cotação	classificação
1				2,5	
2				2,0	
3				2,5	
4				2,0	
5				1,0	
6				2.0	
7				2,5	
8				2,0	
9				2,5	
10				1,0	
Total				10+10	

Nome: ______________________________

Nº: ______________ **Sala:** ______________

Curso: ______________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1^{o} Teste / Exame (1^{a} parte)

1. Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z) = f(x+iy) = \alpha(x) + 2y^2 + ix\beta(y)$$

em que as funções α e β são reais com segunda derivada contínua.

[1,5 val.] (a) Determine f de modo a que seja inteira e verifique $f(-1) = 0$.

[1,0 val.] (b) Calcule

$$\oint_{|z|=2012} \frac{zf(z)}{(z+1)^2}\,dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

2. Sendo $f : \mathbb{C} \setminus \{i, 3i\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{2}{z^2 - 4iz - 3}\,.$$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de $z_0 = 3i$ convergente em $0 < |z - 3i| < 2$.

[1,0 val.] (b) Calcule

$$\int_\gamma (z-3i)f(z)\,dz$$

em que γ é o caminho parametrizado por $z(t) = \cos t + 3i \operatorname{sen} t$, com $t \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

3. Considere a função complexa de variável complexa F definida no seu domínio por

$$F(z) = \frac{1-\cos(\pi z)}{2 - 3z - 2z^2} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4z-1}\right)\,.$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de F, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o integral $\oint_C F(z)dz$ onde C é o quadrado de vértices 4, $4i$, -4 e $-4i$ percorrido uma vez no sentido inverso.

[2,0 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+2x)\cos(4x)}{4x^2+9}dx\,.$$

[1,0 val.] 5. Seja γ um caminho fechado simples tal que $[-1, 0] \subset \text{ext}\,\gamma$. Se $\log$ representar o valor principal do logaritmo mostre que

$$\oint_\gamma \log\left(1 + \frac{1}{z}\right)dz = 0.$$

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte)

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$(x^2 + 3t^2 x + 2tx^2) - t^3 x' = 0, \qquad x(1) = -\frac{1}{2}.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$ para a equação diferencial.

[1,0 val.] (b) Calcule a solução do PVI dado e indique o seu intervalo máximo de definição.

Sugestão: caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(x) = x^{-2}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] (a) Verifique que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh t & \sinh t \\ 0 & \sinh t & \cosh t \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{B}(t), \quad \mathbf{X}(0) = (1, 0, 0)$$

onde $\mathbf{B}(t) = (0, e^t, 0)$.

[2,0 val.] 8. Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y''' + 4y' = 4t + 3\cos(t) \quad , \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,,\ y''(0) = 3\,.$$

[1,0 val.] 9. (a) Seja $f\colon [0, 2] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < 1, \\ 5 & \text{se } 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento de f em série de cosenos indicando a função para a qual a série converge pontualmente.

[1,5 val.] (b) Determine uma solução $u\colon [0, \pi] \times [0, +\infty] \to \mathbb{R}$ para o seguinte problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 5u = 0; \begin{cases} u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad y \ge 0, \\ u(x, 0) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(3x) \quad 0 \le x \le \pi, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

[1,0 val.] 10. Determine uma função $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(x, 0) = \operatorname{sen} x.$$

Sugestão: Considere a mudança de variável $v = x + y$, $w = x - y$.