INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Complexa e Equações Diferenciais

1º Semestre 2011/2012

Testes de Recuperação/Exame

Versão A e B

14 de Janeiro de 2012

Cursos: LEGM, LEIC-A, LEMat, LET, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na coluna correspondente as páginas onde as questões estão respondidas.

  A classificação do seu Teste/Exame será feita de acordo com a coluna que preencher.
- **Duração do teste: 1 hora e 30 minutos**.
  Duração do exame: 3 horas.

Pergunta	pág. 1º**TESTE**	pág. 2º **TESTE**	pág. **EXAME**	cotação	classificação
1				2,5	
2				2,0	
3				2,5	
4				2,0	
5				1,0	
6				2.0	
7				2,5	
8				2,0	
9				2,5	
10				1,0	
Total				10+10	

Nome: ______________________________

Nº: ____________________ **Sala:** ____________________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1^{o} Teste / Exame (1^{a} parte)

1. Considere a função definida em $\mathbb{C}$ por

$$f(z) = f(x+iy) = 4x^2 + \alpha(y) + i\beta(x)y$$

em que as funções α e β são reais com segunda derivada contínua.

[1,5 val.] (a) Determine f de modo a que seja inteira e verifique $f(1) = 0$.

[1,0 val.] (b) Calcule

$$\oint_{|z|=2012} \frac{zf(z)}{(z-1)^2}\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido inverso.

Resolução:

(a) Pelas equações de Cauchy-Riemann $\alpha(y) = -4y^2 + c$ e $\beta(x) = 8x$, $c \in \mathbb{R}$. Por $f(1) = 0$ conclui-se que $c = -4$

(b) Dado que f é inteira, e a curva é uma circunferência percorrida uma vez, é aplicável a fórmula integral de Cauchy. Assim (e atendendo à orientação da curva)

$$\oint_{|z|=2012} \frac{zf(z)}{(z-1)^2}\, dz = -2\pi i [zf(z)]'|_1 = -16\pi i$$

2. Considere $f : \mathbb{C} \setminus \{i, 3i\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{2i}{z^2 - 4iz - 3}\ .$$

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de $z_0 = i$ convergente em $0 < |z-i| < 2$.

[1,0 val.] (b) Calcule

$$\int_\gamma (z-i)f(z)\, dz$$

em que γ é o caminho parametrizado por $z(t) = 3\cos t + 4i \operatorname{sen} t$, com $t \in [-\pi, \frac{\pi}{2}]$.

Resolução:

(a) Para $0 < |z-i| < 2$

$$f(z) = \frac{-1}{z-i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2i)^n} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^n}$$

(b) Dado que existe $U \subset \mathbb{C}$, aberto e simplesmente conexo tal que $\gamma \subset U$ e tanto $\frac{1}{z-3i}$ como o valor principal de $\log(z-3i)$ são analíticas em U, o teorema fundamental do cálculo é aplicável (para estas duas funções). Assim

$$\int_\gamma (z-i)f(z)\, dz = 2i\log(z-3i)\Big|_{\gamma(-\pi)}^{\gamma(\frac{\pi}{2})} = -\frac{5\pi}{2} + 2i\log(3\sqrt{2})$$

[1,5 val.] [1,0 val.]

3. Considere a função complexa de variável complexa F definida no seu domínio por

$$F(z) = \frac{1-\cos(\pi z)}{2-3z-2z^2} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{4z-1}\right).$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de F, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o integral $\oint_C F(z)dz$ onde C é o quadrado de vértices 4, $4i$, -4 e $-4i$ percorrido uma vez no sentido inverso.

Resolução:

(a) As singularidades de F são $z_0 = \frac{1}{2}, z_1 = -2$ e $z_2 = \frac{1}{4}$. Dado que

$$\lim_{z\to\frac{1}{2}} (z - \tfrac{1}{2})F(z) = -\frac{1}{5} \qquad \text{e} \qquad \lim_{z\to-2} F(z) = 0$$

conclui-se que z_0 é um pólo simples e z_1 é removível. Os resíduos de F em z_0 e z_1 são $-\frac{1}{5}$ e 0 respectivamente.

O desenvolvimento em série

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{4z-1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{1+2n}(1+2n)!}\frac{1}{(z-1/4)^{1+2n}}, \text{ para } |z-\tfrac{1}{4}| > 0$$

mostra que F tem uma singularidade essencial em z_2 com resíduo $\frac{1}{4}$.

(b) Pelo teorema dos resíduos vem

$$\oint_C F(z)dz = -2\pi i \left(\operatorname{Res}(F, z_0) + \operatorname{Res}(F, z_1) + \operatorname{Res}(F, z_2)\right) = -i\frac{\pi}{10}$$

[2,0 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+2x)\cos(4x)}{4x^2+9}dx.$$

Resolução:

Para o cálculo do integral temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+2x)\cos(4x)}{4x^2+9}dx = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Re}\left(\oint_{\gamma_R} \frac{(1+2z)e^{i4z}}{4z^2+9}dz - \int_{C_R} \frac{(1+2z)e^{i4z}}{4z^2+9}\,dz\right)$$

onde $\gamma_R = \partial\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \le R \text{ e } \operatorname{Im}(z) \ge 0\}$ e $C_R = \gamma_R \cap \{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Im}(z) > 0\}$ com $R > 2$. Recorrendo ao teorema dos resduos e usando o lema de Jordan vem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(1+2x)\cos(4x)}{4x^2+9}dx = \operatorname{Re}\left(2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{(1+2z)e^{i4z}}{4z^2+9}, \frac{3i}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{6}e^{-6}.$$

[1,0 val.] 5. Seja γ um caminho fechado simples tal que $[0,1] \subset \operatorname{ext}\gamma$. Se $\log$ representar o valor principal do logaritmo mostre que

$$\oint_\gamma \log\left(1-\frac{1}{z}\right)dz = 0.$$

Resolução:

O valor principal do logaritmo é uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$. A aplicação $z \mapsto 1 - \frac{1}{z}$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Por outro lado,

$$1 - \frac{1}{z} \in]-\infty, 0] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{z} \in [1, +\infty[\quad \Leftrightarrow \quad z \in]0, 1]$$

Logo, a composta $t \mapsto \log\left(1 - \frac{1}{z}\right)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ e a conclusão resulta imediatamente da aplicação do teorema de Cauchy.

2^{o} Teste / Exame (2^{a} parte)

6. Considere o seguinte problema de valor inicial (PVI)

$$(y^3 + xy + 3x^2y^3) - x^2y' = 0, \qquad y(-1) = \frac{1}{2}\,.$$

[1,0 val.] (a) Calcule um factor integrante da forma $\mu = \mu(y)$ para a equação diferencial.

[1,0 val.] (b) Calcule a solução do PVI dado e indique o seu intervalo máximo de definição.

Sugestão: caso não tenha resolvido a alínea (a), mostre que $\mu(y) = y^{-3}$ é um factor integrante para a equação diferencial; note que isso valerá somente cotação parcial na alínea (a).

Resolução:

(a) Escrevendo $M(x,y) = y^3 + xy + 3x^2y^3$, $N(x,y) = -x^2$, mostremos que existe $\mu(y)$ tal que $\frac{\partial}{\partial y}[\mu(y)M(x,y)] - \frac{\partial}{\partial x}[\mu(y)N(x,y)] = 0$. Desenvolvendo as derivadas obtemos $\mu'(y)(y^3 + xy + 3x^2y^2) + \mu(y)(3y^2 + 3x + 9x^2y^2) = 0$ o que, por divisão por $y^3 + xy + 3x^2y^2$ resulta em

$$\mu'(y) + \frac{3}{y}\mu(y) = 0.$$

Resolvendo esta EDO linear obtem-se $\mu(y) = ce^{-3\log|y|} = \frac{c}{|y|^3}$, em cada intervalo não contendo $y = 0$. Podemos então escolher $\mu(y) = \frac{1}{y^3}$ para $y \neq 0$.

(b) A equação $\mu(y)M(x,y) + \mu(y)N(x,y)y' = 0$ escreve-se $(1 + xy^{-2} + 3x^2) - x^2y^{-3}y' = 0$, a qual sabemos ser exacta em qualquer rectângulo aberto não intersectando $\{(x,y)|y = 0\}$, em particular no semiplano $y < 0$ (onde está a condição inicial). Então existe $\Phi(x,y)$ tal que, para $y < 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x,y) = 1 + xy^{-2} + 3x^2, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -x^2y^{-3}. \tag{1}$$

Primitivando a primeira equação obtem-se $\Phi(x,y) = x + \frac{x^2y^{-2}}{2} + x^3 + h(y)$, e logo, $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(x,y) = -x^2y^{-3} + h'(y)$. Usando a segunda das expressões (1), resulta $h'(y) = 0$ e, portanto $\Phi(x,y) = x + \frac{x^2y^{-2}}{2} + x^3 + c_0$ e a solução será implicitamente definida por $x + \frac{x^2y^{-2}}{2} + x^3 = c$. Da condição inicial obtem-se $c = 0$. Explicitando y e atendendo a que $y < 0$ resulta, por fim:

$$y(x) = -\sqrt{\frac{-x}{2 + 2x^2}}, \quad x \in]-\infty, 0[\,.$$

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] (a) Verifique que

$$e^{At} = e^t \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \operatorname{senh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} t & 0 & \cosh t \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (b) Determine a solução do problema

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} + \mathbf{B}(t) , \quad \mathbf{X}(0) = (0, 1, 0)$$

onde $\mathbf{B}(t) = (e^t, 0, 0)$.

Resolução:

(a) Denominando as colunas da matriz dada por $\mathbf{X}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, e atendendo à unicidade de solução do (PVI)$_i$

$$\mathbf{X}' = A\mathbf{X} \qquad , \qquad \mathbf{X}(0) = e_i$$

(em que e_i, $i = 1,\ 2,\ 3$ são os vectores da base de $\mathbb{R}^3$), para que a matriz dada seja e^{At} é suficiente mostrar que a função $X_i(t)$ é solução do respectivo (PVI)$_i$. É imediato verificar que $X_1(0) = (1, 0, 0)$, $X_2(0) = (0, 1, 0)$ e $X_3(0) = (0, 0, 1)$ pelo que as colunas da matriz dada verificam as respectivas condições iniciais. Por outro lado

$$\frac{d}{dt}\Big(e^t \begin{bmatrix} \cosh t \\ 0 \\ \operatorname{senh} t \end{bmatrix}\Big) = e^t \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} = Ae^t \begin{bmatrix} \cosh t \\ 0 \\ \operatorname{senh} t \end{bmatrix},$$

$$\frac{d}{dt}\Big(e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big) = Ae^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{d}{dt}\Big(e^t \begin{bmatrix} \operatorname{senh} t \\ 0 \\ \cosh t \end{bmatrix}\Big) = e^t \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix} = Ae^t \begin{bmatrix} \operatorname{senh} t \\ 0 \\ \cosh t \end{bmatrix},$$

pelo que os $X_i(t)$, com $i = 1, 2, 3$, verificam a equação diferencial. Conclui-se que a matriz dada é e^{At}.

(b) Usando a fórmula da variação das constantes

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= e^{At}\Big(\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{-As} B(s)\, ds\Big) \\
&= e^{At}\Big(\mathbf{X}(0) + \int_0^t e^{-s} \begin{bmatrix} \cosh s & 0 & -\operatorname{senh} s \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{senh} s & 0 & \cosh s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ds\Big) \\
&= e^{At}\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \cosh s \\ 0 \\ -\operatorname{senh} s \end{bmatrix} ds\Big) \\
&= e^t \begin{bmatrix} \cosh t & 0 & \operatorname{senh} t \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{senh} t & 0 & \cosh t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \operatorname{senh} t \\ 1 \\ 1 - \cosh t \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cosh t - 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

8. (**Cursos:** LEGM, LEIC-A, LEMat, LET, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ)

[2,0 val.] Determine a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y''' + y' = t + 6\,\mathrm{sen}(2t) \quad , \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Resolução: A solução geral da equação é da forma $y(t) = y_H(t) + y_P(t)$ em que $y_H(t)$ é a solução geral da equação homogénea associada e $y_P(t)$ é uma solução particular da equação. O polinómio característico da equação homogénea é $P(r) = r(r^2+1)$, e as suas raízes são 0 e $\pm i$ (com multiplicidades 1), pelo que:

$$y_H(t) = a + b\cos t + c\,\mathrm{sen}\,t \quad , \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Para calcular y_P, note-se que o polinómio aniquilador de $B(t) = t + 6\,\mathrm{sen}\,2t$ é $P_A(D) = D^2(D^2+4)$. Aplicando $P_A(D)$ a ambos os membros da equação não homogénea, obtém-se:

$$D^2(D^2+4)D(D^2+1)y = D^2(D-2)[-t+e^{2t}] \quad \Rightarrow \quad D^3(D^2+4)(D^2+1)y = 0$$

A solução geral desta última equação (homogénea) é da forma

$$\begin{aligned} y(t) &= A + Bt + Ct^2 + D\cos t + E\,\mathrm{sen}\,t + F\cos(2t) + G\,\mathrm{sen}(2t) \\ &= y_H(t) + Bt + Ct^2 + F\cos(2t) + G\,\mathrm{sen}(2t), \end{aligned}$$

onde $A, B, \ldots\ F, G \in \mathbb{R}$. Conclui-se que existe uma solução particular da forma $Bt + Ct^2 + F\cos(2t) + G\,\mathrm{sen}(2t)$. Substituindo na equação inicial (não homogénea) temos

$$\begin{aligned} (D^3+D)\big(Bt + Ct^2 + F\cos(2t) + G\,\mathrm{sen}(2t)\big) &= t + 6\,\mathrm{sen}(2t) \\ 8F\,\mathrm{sen}(2t) - 8G\,\mathrm{sen}(2t) + B + 2Ct - 2F\,\mathrm{sen}(2t) + 2G\cos(2t) &= t + 6\,\mathrm{sen}(2t) \\ B + 2Ct + 6F\,\mathrm{sen}(2t) - 6G\cos(2t) &= t + 6\,\mathrm{sen}(2t) \end{aligned}$$

Resulta pois que $B = 0$, $C = \frac{1}{2}$, $F = 1$ e $G = 0$. A solução geral da equação diferencial é, portanto

$$y(t) = a + b\cos t + c\,\mathrm{sen}\,t + \frac{t^2}{2} + \cos(2t),$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Substituindo esta solução nas condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$, obtêm-se

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ c = 0 \\ -b + 1 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que a solu¸cão do problema de valor inicial é

$$y(t) = 2 + \frac{t^2}{2} - 3\cos t + \cos(2t).$$

(**Cursos:** LEAN, MEAer, MEEC, MEMec)

Determine a solução do problema de valor inicial

$$y''' + y' = b(t)\ , \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0\ ,$$

escolhendo para $b(t)$ **uma e uma só** das seguintes funções. *Note que a cotação deste problema é reduzida em 0,5 val. se optar pela segunda função.*

[2,0 val.] (i) $b(t) = 1 + \delta(t-1)$

[1,5 val.] (ii) $b(t) = 6\operatorname{sen}(2t)$.

Resolução:

(i) Escrevendo $Y(s)$ para a transformada de Laplace de $y(t)$ e aplicando a transformada de Laplace à equação obtemos

$$s(s^2+1)Y(s) = 1 + e^{-s} \Leftrightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + e^{-s}\frac{1}{s(s^2-1)}$$

donde

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1} + e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right).$$

Conclui-se que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = t - \operatorname{sen} t + H(t-1)\left(1 - \cos(t-1)\right).$$

(ii) Uma vez que $(D^2+4)6\operatorname{sen}(2t) = 0$, a solução do problema de valor inicial satisfaz a equação homogénea

$$(D^2+4)D(D^2+1)y = 0$$

pelo que $y(t)$ é da forma

$$y(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + c_4\cos(2t) + c_5\operatorname{sen}(2t)$$

com $c_i \in \mathbb{R}$. Substituindo na equação inicial (e notando que os termos correspondentes a c_1, c_2 e c_3 são soluções da equação homogénea associada) temos

$$\begin{aligned}
(D^3+D)(c_4\cos(2t) + c_5\operatorname{sen}(2t) &= 6\operatorname{sen}(2t)\\
8c_4\operatorname{sen}(2t) - 8c_5\cos(2t) - 2c_4\operatorname{sen}(2t) + 2c_5\cos(2t) &= 6\operatorname{sen}(2t)\\
6c_4\operatorname{sen}(2t) - 6c_5\cos(2t) &= 6\operatorname{sen}(2t)
\end{aligned}$$

pelo que $c_4 = 1$ e $c_5 = 0$. A solução geral da equação diferencial é portanto

$$y(t) = c_1 + c_2\cos t + c_3\operatorname{sen} t + \cos(2t)$$

Substituindo nas condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ e $y''(0) = 0$ obtemos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + 1 = 0\\ c_3 = 0\\ -c_2 - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = 3\\ c_2 = -4\\ c_3 = 0 \end{cases}$$

donde se conclui que a solução do problema de valor inicial é

$$y(t) = 3 - 4\cos t + \cos(2t)$$

[1,0 val.] 9. (a) Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \le t < \frac{1}{2},\\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Determine o desenvolvimento de f em série de cosenos indicando a função para a qual a série converge pontualmente.

[1,5 val.] (b) Determine uma solução $u\colon [0,+\infty[\times[0,\pi] \to \mathbb{R}$ para o seguinte problema:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2u = 0;\begin{cases} u(x,0) = u(x,\pi) = 0, \quad x \ge 0,\\ u(0,y) = \operatorname{sen} y - \operatorname{sen}(2y), \quad 0 \le y \le \pi,\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, \quad 0 \le y \le \pi. \end{cases}$$

Resolução:

(a) Tem-se

$$a_0 = 2\int_0^1 f(t)dt = 1$$

e, para $n \geq 1$,

$$a_n = 2\int_0^1 f(t)\cos(n\pi t)dt = 2\int_{\frac{1}{2}}^1 \cos(n\pi t)dt = -\frac{2\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}$$

logo a série de cosenos é

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{2})}{n\pi}\cos(n\pi t).$$

A soma da série é a função $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } t = \frac{1}{2} \\ f(t) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(b) Substituindo $u(x,y) = X(x)Y(y)$ na equação obtemos o sistema

$$\begin{cases} X''(x) = (k+2)X(x) \\ Y''(y) = kY(y) \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{R}$.
Uma solução não nula da forma $u(x,y) = X(x)Y(y)$ que satisfaça $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$ verifica necessariamente $Y(0) = Y(\pi) = 0$. Para que haja soluções não nulas de

$$Y''(y) = kY(y) \quad \text{com} \quad Y(0) = Y(\pi) = 0,$$

a constante k tem de ser negativa. Nesse caso

$$Y(y) = A\cos(\sqrt{-k}y) + B\operatorname{sen}(\sqrt{-k}y)$$

e $Y(0) = 0 \Leftrightarrow A = 0$ enquanto que $Y(\pi) = 0 \Leftrightarrow B = 0$ ou $k = -n^2$ com n inteiro.
Assim $Y(y) = B\operatorname{sen}(ny)$ com $n = 1, 2, 3, \ldots$
Para cada n temos a equação $X''(x) = (2-n^2)X(x)$ que tem solução

$$X(x) = A\cosh(x) + B\operatorname{senh}(x)$$

se $n = 1$, e

$$X(x) = A\cos(\sqrt{n^2-2}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{n^2-2}x)$$

se $n > 1$.
Como $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y) = X'(0)Y(y) = 0$ vemos que as constantes B nas igualdades anteriores devem ser nulas. Assim, as soluções da forma $X(x)Y(y)$ que satisfazem as condições de fronteira homogéneas são os múltiplos de

$$\cosh x \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad \cos(\sqrt{n^2-2}x)\operatorname{sen}(ny) \text{ com } n \geq 2.$$

É imediato encontrar uma combinação linear destas soluções que satisfaz a condição restante:

$$u(x,y) = \cosh x \operatorname{sen} y - \cos(\sqrt{2}x)\operatorname{sen}(2y).$$

[1,0 val.] 10. Determine uma função $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 tal que

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad u(x,0) = \operatorname{sen} x.$$

Sugestão: Considere a mudança de variável $v = x + y$, $w = x - y$.

Resolução: Como

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial w},$$

e, analogamente, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial v} - \frac{\partial u}{\partial w}$, nas novas coordenadas, a equação diferencial escreve-se $\frac{\partial u}{\partial v} = 0$ e portanto tem solução $u(v,w) = f(w)$ com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária.

Nas variáveis (v,w), a condição $u(x,0) = \operatorname{sen} x$ escreve-se $u(w,w) = \operatorname{sen} w$. Conclui-se que a solução da equação nas coordenadas (v,w) $u(v,w) = \operatorname{sen} w$ e portanto a solução pretendida é

$$u(x,y) = \operatorname{sen}(x-y).$$