Análise Complexa e Equações Diferenciais
Exame de Época Especial 2011/2012

16 de Julho de 2012, 15h

Duração: 3h

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.

[1,0 val.] 1. (a) Detemine todos os valores de $\theta \in \mathbb{R}$ que satisfazem a equação $|1 + e^{i\theta}| = \sqrt{2}$.

[1,0 val.] (b) Calcule o valor do integral $\int_\gamma \bar{z}\, dz$ onde γ é o gráfico de $x \mapsto \operatorname{sen}(x)$ para $x \in [0, \pi]$.

[1,0 val.] (c) Calcule

$$\int_C \log(z)\, dz$$

onde $\log$ designa o logaritmo principal e C é uma curva, contida no primeiro quadrante, que une 1 a $i\pi$.

[1,0 val.] 2. (a) Determine a série de Laurent de

$$F(z) = 1 + z + \frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

válida na região $0 < |z+1| < 2$.

[1,0 val.] (b) Calcule $\oint_{|z+1|=1} F(z)\, dz$ onde a circunferência é percorrida no sentido positivo.

3. Considere a função complexa de variável complexa g definida no seu domínio por

$$g(z) = ze^{1-\frac{1}{z}} + \frac{1 - \cos z}{(1+z)(z-2\pi)^2}$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de g, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o integral $\oint_C g(z) dz$ onde C é o triângulo de vértices em i, $-1-i$ e $1-i$, percorrido uma vez no sentido positivo.

[1,5 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+4x^2)^2} \ .$$

[1,0 val.] 5. Seja f uma função inteira e tal que o seu contradomínio está contido na união do eixo real com o eixo imaginário. O que pode concluir?

[1,5 val.] 6. (a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$t\,y' = y^2 + 1 + t + t\,y^2.$$

[1,5 val.] (b) Determine um factor integrante $\mu = \mu(y)$ e indique a solução do problema de valor inicial

$$t\frac{dy}{dt} = y\,(1 + t\,y)\,, \qquad y(1) = 1.$$

7. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{h}(t) = e^{4t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (a) Calcule a solução geral de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

[1,5 val.] (b) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] 8. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + y' = \cos(t), \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

[1,0 val.] 9. (a) Calcule a série de Fourier de senos da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2 - 2x$.

[1,0 val.] (b) Determine a solução do problema, para $x \in [0,1],\ t > 0$:

$$u_t = u_{xx} - t\,u, \quad \begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

[1,0 val.] 10. Sendo $y_1 \in \mathbb{R}^+$, considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y}{1 + ty + t^2} & t > 0, \\ y(1) = y_1. \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única $y(t)$, para $t > 0$, e que esta é limitada.
Justifique a existência do limite $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.