TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2012/2013

Testes de Recuperação/Exame

Versão A

24 de Junho de 2013

Cursos: LEAN, LEMat, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiom, MEBiol, MEFT, MEMec, MEQ

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na coluna correspondente à prova que escolheu realizar as páginas onde as questões foram respondidas.

  A classificação do seu Teste/Exame será feita de acordo com a coluna que preencher.
- **Duração do teste: 1 hora e 30 minutos**.
  Duração do exame: 3 horas.

Pergunta	pág. 1º**TESTE**	pág. 2º **TESTE**	pág. **EXAME**	cotação	classificação
1				3,0	
2				1,5	
3				2,5	
4				2,0	
5				1,0	
6				2,0	
7				2,0	
8				2,0	
9				2,5	
10				1,5	
Total	10 val.	10 val.	20 val.	20,0	

Nome: ____________________ **Sala:** __________

Nº: ____________________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1^{o} Teste / Exame (1^{a} parte)

1. Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$u(x, y) = \alpha x - \alpha(x^2 - \alpha y^2) + \operatorname{sen}(x)\cosh(y)$$

[1,0 val.] (a) Determine os valores de α para os quais u é uma função harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] (b) Considerando $\alpha = 1$, calcule uma função inteira f tal que $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $f(0) = i$.

[1,0 val.] (c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{(z-1)^2} dz,$$

onde a curva é percorrida no sentido positivo.

2. Considere $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{z-2}{z}$.

[1,0 val.] (a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de $z_0 = 1$ e que converge em $z = 2013\mathrm{i}$. Indique qual a maior região onde o desenvolvimento é válido.

[0,5 val.] (b) Determine o valor de

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^6} dz$$

em que $\gamma = \{z \in \mathbb{C} \, : \, |z - 1| = 6\}$ é percorrida uma vez em sentido directo.

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(\pi z)}{z(z-1)^2} + \frac{4}{(z-1)^4} + z^3 \cos\frac{2}{z}.$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f.

[1,5 val.] (b) Calcule o valor de

$$\oint_{|z|=2013} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida em sentido inverso.

[2,0 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x^2 + 6x + 10} dx.$$

[1,0 val.] 5. Seja γ uma curva de Jordan e f uma função holomorfa em $\gamma \cup \operatorname{int}\gamma$ excepto num número l de singularidades em $\operatorname{int}\gamma$ do tipo pólo, de ordens respectivamente $p_1, \ldots, p_l$. Suponha ainda que f não se anula em γ e tem k zeros em $\operatorname{int}\gamma$ respectivamente de ordem $n_1, \ldots n_k$. Mostre que

$$n_1 + \cdots + n_k - (p_1 + \cdots + p_l) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz,$$

onde a curva γ é percorrida no sentido directo.

2^{o} Teste / Exame (2^{a} parte)

6. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$x^2 + y^2 + x - xy\frac{dy}{dx} = 0 \quad , \quad y(1) = -1$$

[1,0 val.] (a) Mostre que a equação diferencial possui um factor integrante da forma $\mu = \mu(x)$ e determine-o.

[1,0 val.] (b) Determine explicitamente a solução do problema dado.

7. Considere o sistema

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -x + 2y + b(t) \end{cases} \tag{1}$$

[1,0 val.] (a) Determine a solução geral real de (1) para o caso $b(t) = 0$.

[1,0 val.] (b) Considerando $b(t) = e^{2t}$, calcule a solução de (1) que satisfaz as condições iniciais $x(0) = 1$ e $y(0) = 0$.

[2,0 val.] 8. Resolva o problema de valor inicial

$$y'' - 3y' - 4y = g(t) \qquad , y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0$$

sendo $g(t)$ a função definida por

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 2 \\ 30e^t & \text{se} \quad t \geq 2 \end{cases}$$

9. Considere o problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u & , \quad 0 < x < 2 \ , \ t > 0 \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2,t) = 0 & , \quad t > 0 \\ \\ u(x,0) = 3x & , \quad 0 < x < 2 \end{cases} \tag{2}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de Fourier de cosenos da função $f(x) = 3x$ em $[0, 2]$ indicando a soma da série para cada $x \in \mathbb{R}$.

[1,5 val.] (b) Determine uma solução formal do problema (2).

10. Considere o sistema de equações lineares de primeira ordem $x' = \mathbf{A}x$, para

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

[0,5 val.] (a) Justifique que as soluções dos problemas de valor inicial para $x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $x(0) = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix}$, com $\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ são únicas e calcule-as.

[1,0 val.] (b) Designando por $x^0(t)$ e $x^\epsilon(t)$ essas soluções mostre que a distância entre elas tende para zero quando $t \to +\infty$ se e só se ϵ é vector próprio da matriz $\mathbf{A}$ associado ao valor próprio $\lambda = -1$.