Análise Complexa e Equações Diferenciais

Semestre 2012/2013

1º Teste — Versão A

(CURSOS: LEAN, LEMAT, LMAC, MEAER, MEAMBI, MEBIOM, MEBIOL, MEFT, MEMEC, MEQ)

6 de Abril de 2013, 11h

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		4,5	
2)		1,0	
3)		1,5	
4)		2,0	
5		1,0	
Total		10	

Nome: ______________________________

Nrº : ____________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = z + \overline{z}^3 \, z \ \ .$$

[1,0 val.] (a) Calcule todas as soluções da equação $f(z) = 0$.

[0,5 val.] (b) Mostre que

$$\operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) = x + x^4 - y^4 \quad , \quad \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}y) = v(x, y) = y - 2x^3 y - 2xy^3$$

[1,0 val.] (c) Determine o conjunto de pontos onde f admite derivada complexa, e calcule a derivada nesses pontos. Indique, justificando, o domínio de analiticidade de f .

[1,0 val.] (d) Determine uma função g, holomorfa em $\mathbb{C}$, tal que $\operatorname{Re} g(x + iy) = 6x^2y^2 - x^4 - y^4$.

[1,0 val.] (e) Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{g(z)}{(z-1)^2} dz$$

onde a curva é percorrida uma vez em sentido directo.

[1,0 val.] 2. Use o teorema fundamental do cálculo para calcular

$$\int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^2} dz$$

em que γ é o caminho definido por $\gamma(t) = e^{\mathrm{i}\pi t/2}$, para $t \in [0, 1]$.

3. Seja $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{\mathrm{i}}{2}, \mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{2z + \mathrm{i}} + e^{\frac{\mathrm{i}}{z - \mathrm{i}}} \ \ .$$

[1,0 val.] (a) Escreva o desenvolvimento em série de Laurent de f convergente em $|z - \mathrm{i}| > \frac{3}{2}$.

[0,5 val.] (b) Determine todos os valores de $p \in \mathbb{Z}$ para os quais

$$\oint_{|z|=2013} (z - \mathrm{i})^p f(z) \, dz = 0$$

4. Considere a função complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{z + 2\pi}{1 - e^{\mathrm{i}z}} + \frac{1}{z^2 - 4z + 5} \ .$$

[1,0 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de f, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Aproveite o resultado da alínea anterior para determinar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$$

[1,0 val.] 5. Seja γ uma curva de Jordan e f holomorfa num conjunto aberto e simplesmente conexo contendo γ. Mostre que, para todo z pertencente à região interior a γ se verifica

$$|f(z)| \leq M,$$

onde $M := \max\{|f(z)|, \ \ z \in \gamma\}$. Mostre ainda que se existe z_0 pertencente à região interior a γ tal que $|f(z_0)| = M$, então f é necessáriamente constante.