TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2012/2013

2º Teste — Versão A

(Cursos: LEAN, LEMat, LMAC, MEAer, MEAmbi, MEBiom, MEBiol, MEFT, MEMec, MEQ)

25 de Maio de 2013, 11h

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		2,0	
2)		2,0	
3)		2,0	
4)		2,5	
5)		1,5	
Total		10	

Nome: ______________________________

Nro : ______________________ **Sala:** __________

Curso: ______________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 1 \qquad , \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0 \ .$$

[1,0 val.] (a) Determine uma solução do problema.

[1,0 val.] (b) Indique o intervalo máximo de existência da solução encontrada e justifique que é a única solução do PVI.

2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

[1,0 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad \text{com} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

[2 val.] 3. Calcule a solução do problema de valor inicial

$$y'' - 5y' + 6y = \delta(t-2) + 12e^t \qquad , \qquad y(0) = 0, \ y'(0) = 0.$$

4. Considere o problema de valores na fronteira e valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad x \in]0,\pi[\ , \ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ u(0,x) = f(x) & , \quad x \in]0,\pi[\end{cases} \tag{1}$$

em que f é a função definida em $[0,\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \pi & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de senos da função $f(x)$ e indique a soma da série no intervalo $[0,\pi]$.

[1,5 val.] (b) Calcule uma solução formal, $u(t,x)$, do problema (1).

5. Para $b \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados, considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(0,x) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[0,5 val.] (a) Verifique que $u(t,x)$ é constante ao longo do segmento de recta no plano que passa por (t,x) com direção $(1,b)$.

[1,0 val.] (b) Atendendo ao resultado da alínea anterior justifique que se o problema tem um solução ela deve ser da forma

$$u(t,x) = g(x - tb).$$

Verifique que se $g \in C^1(\mathbb{R})$ essa é de facto uma solução.