TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2012/2013

2º Teste — Versão A

(CURSOS: LEAN, LEMAT, LMAC, MEAER, MEAMBI, MEBIOM, MEBIOL, MEFT, MEMEC, MEQ)

25 de Maio de 2013, 11h

Duração: 1h 30m

1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x = 1 \qquad , \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 0\ .$$

[1,0 val.] (a) Determine uma solução do problema.

[1,0 val.] (b) Indique o intervalo máximo de existência da solução encontrada e justifique que é a única solução do PVI.

Resolução:

(a) Como

$$y' \operatorname{sen} x + y \cos x = \frac{d}{dx}(y(x) \operatorname{sen} x),$$

a solução geral da equação é dada por $y \operatorname{sen} x = x + C$, e da condição inicial concluímos que $C = -\frac{\pi}{2}$. Portanto, uma solução do problema de valor inicial será

$$y(x) = \frac{x - \pi/2}{\operatorname{sen} x}.$$

Observação: Em qualquer caso, a equação é linear e pode ser escrita na forma

$$y' + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} y = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

admitindo como factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} dx} = \operatorname{sen} x$$

(b) A solução indicada na alínea anterior está bem definida para $x \in]0, \pi[$. Escrevendo a equação na forma

$$y' = f(x, y) = \frac{1 - y \cos x}{\operatorname{sen} x},$$

concluímos imediatamente que $]0, \pi[$ é o intervalo máximo de existência visto a equação deixar de fazer sentido em $x = 0$ ou $x = \pi$.

A função $\frac{1 - y \cos x}{\operatorname{sen} x}$ é obviamente contínua em $\mathbb{R}^2$ e a sua derivada parcial em ordem a y,

$$f_y(x, y) = -\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x},$$

é contínua para $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$. Concluímos portanto pelo Teorema de Picard-Lindelof que a solução obtida anteriormente é única.

2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

[1,0 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad \text{com} \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-3t} \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Resolução:

(a) Os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$ são dados por

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} -5-\lambda & 4 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -3$$

e os respectivos vectores próprios

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x \;\text{ para }\; x \in \mathbb{R},$$

Atendendo a que a matriz $\mathbf{A}$ não é diagonalizável, obtemos a sua forma canónica de Jordan, procurando um vector próprio generalizado:

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então temos

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

e consequentemente

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{S}e^{\mathbf{J}t}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

Resolução alternativa

A matriz e^{At} é uma matriz solução fundamental associada à equação $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Para a determinar vamos calcular a solução geral do sistema. Fazendo $\mathbf{y} = (x, y)$ obtem-se

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x' = -5x + 4y \\ y' = -x - y \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (-y' - y)' = -5(-y' - y) + 4y \\ x = -y' - y \end{cases}$$

Resolvendo a equação em y obtem-se

$$y'' + 6y' + 9y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (D^2 + 6D + 9)y = 0 \quad\Leftrightarrow\quad y(t) = ae^{-3t} + bte^{-3t}$$

e substituindo na outra equação

$$x = -(ae^{-3t} + bte^{-3t})' - (ae^{-3t} + bte^{-3t}) = (2a - b)e^{-3t} + 2bte^{-3t}$$

Assim a solução geral da equação é dada por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2a-b)e^{-3t} + 2bte^{-3t} \\ ae^{-3t} + bte^{-3t} \end{bmatrix} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 & -1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

A matriz

$$S(t) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 & -1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix}$$

é uma matriz solução fundamental, mas dado que $S(0)$ não é a matriz identidade $S(t)$ não é a matriz e^{At}. Tendo-se então que

$$e^{at} = S(t)S^{-1}(0) = e^{-3t} \begin{bmatrix} 2 & -1+2t \\ 1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = e^{-3t} \begin{bmatrix} 1-2t & 4t \\ -t & 1+2t \end{bmatrix}$$

(b) Usando a fórmula de variação das constantes temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{y}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s)ds &= e^{-3t} \begin{bmatrix} 4t \\ 1+2t \end{bmatrix} + \int_0^t (2e^{-3t}) \begin{bmatrix} 1-2(t-s) \\ -(t-s) \end{bmatrix} ds \\
&= e^{-3t} \begin{bmatrix} 4t \\ 1+2t \end{bmatrix} + (2e^{-3t}) \begin{bmatrix} t-t^2 \\ -t^2 \end{bmatrix} ds \\
&= e^{-3t} \begin{bmatrix} 6t-2t^2 \\ 1+2t-2t^2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

[2 val.] 3. Calcule a solução do problema de valor inicial

$$y'' - 5y' + 6y = \delta(t-2) + 12e^t \qquad , \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

Resolução:

Por aplicação da Transformada de Laplace (designada por Y) e atendendo às condições iniciais, obtemos

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = \mathcal{L}(\delta(t-2)) + \mathcal{L}(12e^t) = e^{-2z} + \frac{12}{z-1}.$$

Temos então que

$$Y(z) = \frac{e^{-2z}}{(z^2-5z+6)} + \frac{12}{(z-1)(z^2-5z+6)}.$$

Decompondo em fracções simples

$$\frac{1}{(z^2-5z+6)} = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2},$$

e

$$\frac{12}{(z-1)(z^2-5z+6)} = \frac{6}{(z-3)} + \frac{6}{z-1} - \frac{12}{z-2}.$$

Atendendo às propriedades da Transformada de Laplace, temos então que a solução é dada por:

$$y(t) = H(t-2)e^{3(t-2)} - H(t-2)e^{2(t-2)} + 6e^{3t} + 6e^t + 12e^{2t}.$$

Observação: Em alternativa, poderia ter sido utilizada a fórmula da inversão da Transformada de Laplace, visto que $e^{zt}Y(z)$ tem polos simples em $z = 1$, $z = 2$ e $z = 3$.

4. Considere o problema de valores na fronteira e valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad x \in]0,\pi[\ , \ \ t > 0 \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ \\ u(0,x) = f(x) & , \quad x \in]0,\pi[\end{cases} \tag{1}$$

em que f é a função definida em $[0,\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \\ \pi & \text{se} \quad x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

[1,0 val.] (a) Determine a série de senos da função $f(x)$ e indique a soma da série no intervalo $[0,\pi]$.

[1,5 val.] (b) Calcule uma solução formal, $u(t,x)$, do problema (1).

Resolução:

(a) A série de senos da função $f(x)$ em $[0,\pi]$ é dada por

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

em que, para $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \pi \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n \Big)$$

Assim

$$S_{\text{sen}} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n \Big) \operatorname{sen}(nx)$$

e para $x \in [0,\pi]$ a soma da série é dada por

$$S_{\text{sen}} f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[\ \text{ ou } \ x = \pi \\ \\ \frac{\pi}{2} & \text{se} \quad x = \frac{\pi}{2} \\ \\ \pi & \text{se} \quad x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[\end{cases}$$

(b) Comecemos por determinar, usando separação de variáveis, soluções não nulas do problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = t\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad x \in]0,\pi[\ , \ \ t > 0 \\ \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & , \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

Vamos determinar soluções de (2) da forma $u(t,x) = T(t)X(x)$. Substituindo na equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Leftrightarrow \quad T'(t)X(x) = tT(t)X''(x)$$

e dividindo por $T(t)X(x)$ obtem-se

$$\frac{T'(t)}{tT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \quad , \quad \forall\, x \in]0,\pi[\ \text{ e } \ t>0$$

Verifica-se que a única forma de uma função de t igualar uma função de x para todos os valores possíveis de t e x é que ambas as funções igualem a mesma constante, isto é

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \frac{T'(t)}{tT(t)} = \lambda \quad \text{e} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Por outro lado, substutuindo $u(t,x) = T(t)X(x)$ nas condições iniciais obtemos

$$\begin{cases} u(t,0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad T(t)X(0)=0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0)=0 \ \text{ ou } \ T(t)\equiv 0 \\ \\ u(t,\pi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad T(t)X(\pi)=0 \quad \Leftrightarrow \quad X(\pi)=0 \ \text{ ou } \ T(t)\equiv 0 \end{cases}$$

Visto $T(t)$ não poder ser a função nula (pois isso implicaria que tambem $u(t,x)$ fosse a função nula que obviamente não é solução de (1) pois não verifica a condição inicial), conclui-se que $X(0) = X(\pi) = 0$. Temos assim dois problemas para resolver

$$(\mathbf{P1}) \quad \begin{cases} X'' - \lambda X = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad (\mathbf{P2}) \quad \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda\, t$$

(P1) é um problema de valores próprios correspondentes a um problema com condições de fronteira de Dirichlet. A equação

$$X'' - \lambda X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D^2 - \lambda)X = 0$$

tem como solução geral

$$X(x) = \begin{cases} Ax + B & \text{se} \quad \lambda = 0 \\ \\ Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} & \text{se} \quad \lambda > 0 \quad (\lambda = \mu^2) \\ \\ A\,\text{sen}(\mu x) + B\cos(\mu x) & \text{se} \quad \lambda < 0 \quad (\lambda = -\mu^2) \end{cases}$$

e atendendo às condições de fronteira verifica-se que qualquer $\lambda \geq 0$ não é valor próprio (a única solução de (P1) é a solução nula). Se $\lambda = -\mu^2 < 0$, tem-se que $X(0) = 0$ implica $B = 0$ e $X(\pi) = 0$ implica que $A\,\text{sen}(\mu\,\pi) = 0$. Para que a solução não seja a solução nula há que forçar $\text{sen}(\mu\pi) = 0$ ou seja $\mu = n$. Conclui-se que para cada $n \in \mathbb{N}$ os valores próprios de (P1) são $\lambda = -\mu^2 = -n^2$ correspondentes š soluções $\text{sen}(nx)$ (observa-se que para qualquer outro valor de λ a única solução de (P1) é $X(x) \equiv 0$ que como já foi referido naão produz qualquer solução de (1)).

Vamos agora procurar a solução de (P2) apenas para $\lambda = -n^2$. Assim

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -n^2\, t \qquad \Leftrightarrow \qquad T(t) = e^{-n^2 \frac{t^2}{2}}$$

Concluimos que para cada $n \in \mathbb{N}$, $e^{-n^2 \frac{t^2}{2}}\,\text{sen}(nx)$ são soluções de (2), pelo que, formalmente, qualquer combinação linear (finita ou infinita) tambem é. Ou seja a solução de (2) tem a forma

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \frac{t^2}{2}}\,\text{sen}(nx) \quad , \quad (c_n) \subset \mathbb{R}$$

Finalmente para determinar as constantes (c_n) vamos utilizar a condição inicial

$$u(0,x) = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}(nx) = f(x)$$

Usando a série de senos da função $f(x)$ em $[0,\pi]$ concluimos que

$$c_n = \frac{2}{n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\Big) \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pelo que a solução formal de (1) é

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\Big) e^{-n^2\frac{t^2}{2}} \operatorname{sen}(nx)$$

5. Para $b \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dados, considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, \;\; t > 0 \\ \\ u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[0,5 val.] (a) Verifique que $u(t,x)$ é constante ao longo do segmento de recta no plano que passa por (t,x) com direção $(1,b)$.

[1,0 val.] (b) Atendendo ao resultado da alínea anterior justifique que se o problema tem um solução ela deve ser da forma

$$u(t,x) = g(x - tb).$$

Verifique que se $g \in C^1(\mathbb{R})$ essa é de facto uma solução.

Resolução:

(a) Para $\nabla u := (u_t, u_x)$, a equação pode escrever-se na forma:

$$< \nabla u(t,x), (1,b) >= 0, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},$$

onde $< .,. >$ designa o produto interno em $\mathbb{R}^2$. Como o campo gradiente é ortogonal aos conjuntos de nível, a equação indica precisamente que $u(t,x)$ é constante ao longo da recta que passa por (t,x) com direção $(1,b)$.

(b) Sabemos pela alínea anterior que uma solução da equação é constante ao longo de

$$u(t+s, x+bs), \; s \in \mathbb{R}\,, \;\; s+t > 0.$$

Esta recta passando por (t,x) atinge o eixo $t = 0$ para $s = -t$. Atendendo à condição inicial temos então que

$$u(t,x) = u(0, x-bt) = g(x-bt).$$

Se $g \in C^1(\mathbb{R})$ então $u(x,t) := g(x-bt)$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$, que verifica a condição inicial e trivialmente temos que

$$u_x(t,x) = g'(x-bt), \;\; u_t(t,x) = -bg'(x-bt),$$

e portanto $u_t(t,x) + bu_x(t,x) = 0, \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.