

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2012/2013

2º Teste — Versão B

(CURSOS: LEAN, LEMAT, LMAC, MEAER, MEAMBI, MEBIOM, MEBIOL,
MEFT, MEMEC, MEQ)

25 de Maio de 2013, 11h

Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Justifique as suas respostas e apresente todos os cálculos.
- Numere todas as páginas do seu caderno de respostas e indique na tabela abaixo as páginas onde as questões estão respondidas.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1)		2,0	
2)		2,0	
3)		2,0	
4)		2,5	
5)		1,5	
Total		10	

Nome: _____

Nº : _____

Sala: _____

Curso: _____

Rúbrica (DOCENTE):

1. Considere o seguinte problema de valor inicial

$$y' \cos x - y \operatorname{sen} x = 1 \quad , \quad y(\pi) = 0 .$$

[1,0 val.]

(a) Determine uma solução do problema.

[1,0 val.]

(b) Indique o intervalo máximo de existência da solução encontrada e justifique que é a única solução do PVI.

2. Considere a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.]

(a) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

[1,0 val.]

(b) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{y}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{y}(t) + \mathbf{b}(t) & \text{com } \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} . \end{cases}$$

[2 val.]

3. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$y'' - 6y' + 5y = 24e^{-t} - 12\delta(t-1) \quad , \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

4. Considere o problema de valores na fronteira e valor inicial

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = 4t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & , \quad x \in]0, 2\pi[\quad , \quad t > 0 \\ u(t, 0) = u(t, 2\pi) = 0 & , \quad t \geq 0 \\ u(0, x) = f(x) & , \quad x \in]0, 2\pi[\end{cases} \quad (1)$$

em que f é a função definida em $[0, 2\pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2\pi & \text{se } x \in [\frac{\pi}{2}, 2\pi] \end{cases}$$

[1,0 val.]

(a) Determine a série de senos da função $f(x)$ e indique a soma da série no intervalo $[0, 2\pi]$.

[1,5 val.]

(b) Calcule uma solução formal, $u(t, x)$, do problema (1).

5. Para $b \in \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dados, considere o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + b \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(0, x) = g(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[0,5 val.]

(a) Verifique que $u(t, x)$ é constante ao longo do segmento de recta no plano que passa por (t, x) com direção $(1, b)$.

[1,0 val.]

(b) Atendendo ao resultado da alínea anterior justifique que se o problema tem um solução ela deve ser da forma

$$u(t, x) = g(x - tb).$$

Verifique que se $g \in C^1(\mathbb{R})$ essa é de facto uma solução.