Análise Complexa e Equações Diferenciais

2^{o} Semestre 2013/2014

1^{o} Teste, versão A

(CURSOS: LEIC, MEEC, LEMAT, MEAER, MEBIOL, MEQ, MEAMBI)

5 de Abril de 2014, 11h30m

Duração: 1h 30m

1. Seja $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ e $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função definida por $u(x,y) = \alpha(x) - 3xy^2 - 2y^2$.

[1,0 val.] a) Identifique todas as funções α tais que u é uma função harmónica.

[1,0 val.] b) Considere $\alpha(x) = x^3 + 2x^2$. Determine uma função inteira f tal que

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \quad \text{e} \quad f(-1) = 1.$$

[0,5 val.] c) Calcule a função derivada $f'(x+iy)$.

[0,5 val.] d) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,5 val.] 2. Determine o desenvolvimento em série de Laurent válido para $|z+1| > \sqrt{2}$ da função $f : \mathbb{C} \setminus \{-1, i\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+1)}\,.$$

3. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^2 - 4z} + e^{1/(z-2)}\,.$$

[1,5 val.] a) Classifique todas as singularidades de f e determine os seus resíduos.

[0,5 val.] b) Calcule o valor do integral

$$\oint_{|z|=3} f(z)\, dz$$

onde a curva é percorrida uma vez (em sentido directo).

4. Para cada $R > 2$ considere o caminho $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$, e o caminho fechado simples positivamente orientado $\Gamma_R = [-R, R] + \gamma_R$.

[1,0 val.] a) Use o teorema dos resíduos para calcular $\displaystyle\oint_{\Gamma_R} \frac{z^2}{(4+z^2)^2}\, dz\,.$

[0,5 val.] b) Obtenha a seguinte majoração: $\displaystyle\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{(4+z^2)^2}\, dz \right| \leqslant \frac{\pi R^3}{(R^2-4)^2}\,.$

[1,0 val.] c) Usando as duas alíneas anteriores, calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(4+x^2)^2}\, dx\,,$

[1,0 val.] 5. Calcule o integral

$$\int_\gamma \log(2z)\, dz$$

em que γ é um caminho regular, simples, contido em $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\pi} : r \geq 0\}$, que une i a 1 e $\log$ é o valor principal do logaritmo. Justifique **cuidadosamente** a sua resposta.