TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2013/2014

2º Teste, versão A

(Cursos: LEIC, MEEC, LEMat, MEAer, MEBiol, MEQ, MEAmbi)

31 de Maio de 2014, 11h30m

Duração: 1h 30m

[1,5 val.] 1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{1+x}.$$

Determine a solução que satisfaz $y(0) = -1$ e o respectivo intervalo máximo de existência.

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}.

[0,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \qquad , \qquad \mathbf{y}(0) = (0,0)$$

em que $\mathbf{b} = (1,2)$.

[2,0 val.] 3. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 5 + 2t, & \text{se } t \geq 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u & \text{para} \quad x \in]0,\pi[\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para} \quad t > 0 \\ u(0,x) = f(x) & \text{para} \quad x \in [0,\pi] \end{cases}$$

onde $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2\pi & \text{se} \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

[1.0 val.] (a) Determine a série de senos de f em $[0,\pi]$.

[1,5 val.] (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

[0,5 val.] (c) Justifique que a série obtida na alínea (b) converge em qualquer (x,t) tal que $x \in [0,\pi]$ e $t \geq 0$.

[1,5 val.] 5. Mostre que o conjunto das funções $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciáveis e que satisfazem

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}, \qquad y(1) = 1,$$

possui, pelo menos, dois elementos distintos. Explique porque razão este facto não contradiz o teorema de Picard-Lindeloff. Justifique **cuidadosamente** a sua resposta.