Análise Complexa e Equações Diferenciais
2º Semestre 2013/2014

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC, MEEC, LEMAT, MEAER, MEBIOL, MEQ, MEAMBI)

31 de Maio de 2014, 11h30

[1,5 val.] 1. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{1+x}.$$

Determine a solução que satisfaz $y(0) = -1$ e o respectivo intervalo máximo de existência.

Resolução: A equação dada escreve-se na forma $y' = a(x)y + b(x)$ pelo que é uma equação diferencial linear. Então existe um factor integrante μ tal que

$$\frac{d}{dx}\Big(\mu(x)y(x)\Big) = \mu(x)x.$$

Para este caso, a função $\mu = \mu(x)$ satisfaz

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{1}{1+x}\right)\mu\,,$$

logo podemos escolher

$$\mu(x) = e^{P[\frac{1}{1+x}]} = e^{\ln(1+x)} = 1+x.$$

A solução do problema resulta de

$$y(x) = \frac{1}{1+x}\Big(C + P[(1+x)x]\Big) = \frac{1}{1+x}\left(C + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$$

e

$$y(0) = -1 \Rightarrow C = -1.$$

O intervalo máximo de existência I_{max} contém $x = 0$ pelo que

$$y(x) = \frac{-1}{1+x}\left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right), \quad \forall x \in I_{max} =]-1, +\infty[$$

2. Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

[1,5 val.] (a) Determine e^{At}.

[0,5 val.] (b) Resolva o problema de valor inicial

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{y}(0) = (0,0)$$

em que $\mathbf{b} = (1,2)$.

Resolução:

(a) Os valores próprios da matriz A são dados por:

$$\det(A-\lambda I)=\left|\begin{array}{cc}1-\lambda & -1/2\\ 2 & -1-\lambda\end{array}\right|=(1-\lambda)(-1-\lambda)+1=\lambda^2=0\quad\Leftrightarrow\quad\lambda=0$$

Assim sendo, se A for diagonalizável, então existe uma matriz não singular S tal que $A=S0S^{-1}$, onde 0 a matriz nula (2x2); desta forma:

$$A^2=\left(S0S^{-1}\right)^2=0.$$

Se A não for diagonalizável, então existe uma matriz não singular, S, tal que $A=SJS^{-1}$, com

$$J=\left[\begin{array}{cc}0 & 1\\ 0 & 0\end{array}\right]$$

Note que $J^2=0$, pelo que:

$$A^2=SJS^{-1}\,SJS^{-1}=SJ^2S^{-1}=0.$$

Em qualquer dos casos, A verifica $A^n=0$, para qualquer $n\geq 2$. Assim:

$$e^{At}=I+tA=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\end{array}\right]+\left[\begin{array}{cc}t & -t/2\\ 2t & -t\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}1+t & -t/2\\ 2t & 1-t\end{array}\right]$$

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= e^{At}\left(\mathbf{y}_0+\int_0^t e^{-As}\,\mathbf{b}\,ds\right)\\
&= e^{At}\left(\left[\begin{array}{c}0\\0\end{array}\right]+\int_0^t\left[\begin{array}{cc}1-s & s/2\\ -2s & 1+s\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right]ds\right)\\
&= e^{At}\left(\int_0^t\left[\begin{array}{c}1\\2\end{array}\right]ds\right)=\left[\begin{array}{cc}1+t & -t/2\\ 2t & 1-t\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}t\\2t\end{array}\right]\\
&= \left[\begin{array}{c}t\\2t\end{array}\right].
\end{aligned}$$

[2,0 val.] 3. Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases}y''+3y'+2y=5+2t, & \text{se } t\geq 0\\ y(0)=0,\quad y'(0)=1.\end{cases}$$

Resolução: A equação escreve-se na forma

$$\left(D^2+3D+2\right)\left(y(t)\right)=5+2t, \tag{1}$$

onde $D=\frac{d}{dt}$. Além disso, o termo independente $h(t)=5+2t$ é solução da equação diferencial

$$D^2\big(h(t)\big)=0.$$

Então a solução do problema de valor inicial (PVI) é também solução da equação homogénea

$$D^2\left(D^2+3D+2\right)\left(y(t)\right)=0\quad\Leftrightarrow\quad D^2(D+1)(D+2)(y(t))=0.$$

Então escrevemos

$$y(t)=\underbrace{c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}}_{y_h(t)}+\underbrace{d_1+d_2t}_{y_p(t)}, \tag{2}$$

onde c_1,c_2,d_1,d_2 são constantes reais. Note-se que $y_h(t)$ é a solução geral da variante homogénea da equação (1) logo, para que (2) seja solução de (1), é necessário que

$$y_p''+3y_p'+2y_p=5+2t\quad\Leftrightarrow\quad 3d_2+2(d_1+d_2t)=5+2t\quad\Leftrightarrow\quad d_1=d_2=1.$$

Assim a solução geral da equação (1) é

$$y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + 1 + t$$

logo calcular a solução do PVI passa por determinar c_1 e c_2 a partir dos valores iniciais. Então

$$\left\{\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 + c_2 + 1 = 0 \\ -c_1 - 2c_2 + 1 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 + c_2 = -1 \\ c_2 = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} c_1 = -2 \\ c_2 = 1 \end{array}\right.$$

e a solução do PVI é

$$y(t) = -2e^{-t} + e^{-2t} + 1 + t.$$

4. Considere o problema de valores iniciais e de fronteira

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u & \text{para} & x \in]0, \pi[\ ,\ t > 0 \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{para} & t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & \text{para} & x \in [0,\pi] \end{array}\right. \tag{3}$$

onde $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ é dada por:

$$f(x) = \left\{\begin{array}{lll} 0 & \text{se} & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2\pi & \text{se} & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{array}\right.$$

[1.0 val.] (a) Determine a série de senos de f em $[0,\pi]$.

[1,5 val.] (b) Determine a solução do problema de valores iniciais e de fronteira.

[0,5 val.] (c) Justifique que a série obtida na alínea (b) converge em qualquer (x,t) tal que $x \in [0,\pi]$ e $t \geq 0$.

Resolução:

(a) A série de senos de f tem a forma

$$SSf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx),$$

onde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$$

Tendo em conta que $f(x)$ é nula no intervalo $[0, \pi/2[$, então:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 2\pi \operatorname{sen}(nx)\, dx = -\frac{4}{n} \cos(nx) \Big|_{\pi/2}^{\pi} \\ &= -\frac{4}{n} \left(\cos(n\pi) - \cos\frac{n\pi}{2} \right) = \frac{4}{n} \left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n \right) \end{aligned}$$

Assim:

$$SSf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n} \left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n \right) \operatorname{sen}(nx).$$

(b) Vamos procurar soluções não nulas da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ para a a equação diferencial parcial e condições auxiliares homogéneas. Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) - 2X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} + 2 = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Esta igualdade é equivalente ao sistema seguinte, onde λ é um número real qualquer

$$\left\{\begin{array}{l} X''(x) - \lambda X(x) = 0. \\ T'(t) = (\lambda - 2)T(t) \end{array}\right.$$

Das condições de fronteira, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ resulta, para as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$, que

$$T(t)X(0) = T(t)X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(\pi) = 0 \end{cases}$$

Resolvemos, em primeiro lugar, o problema de valores próprios (para $x \in [0,\pi]$):

$$X'' - \lambda X = 0 \quad ; \quad X(0) = X(\pi) = 0. \tag{4}$$

O polinómio característico da equação diferencial, $P(R) = R^2 - \lambda$, tem raízes $R = \pm\sqrt{\lambda}$, pelo que a expressão para as soluções da equação (4) dependem do sinal de λ. Temos

$$X(x) = \begin{cases} Be^{\sqrt{\lambda}x} + Ce^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ Bx + C & \text{se } \lambda = 0 \\ B\cos\omega x + C\operatorname{sen}\omega x & \text{se } \lambda < 0. \end{cases}$$

onde B, C são constantes reais e $\omega = \sqrt{|\lambda|} \Leftrightarrow \lambda = -\omega^2$ (com $\omega > 0$).
Impondo as condições de fronteira às soluções, $X(x)$, acima determinadas, temos

(i) Para $\lambda > 0$:

$$\begin{cases} B + C = 0 \\ Be^{\sqrt{\lambda}\pi} + Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = -B \\ B(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - Ce^{-\sqrt{\lambda}\pi}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

(ii) Para $\lambda = 0$ resulta que $A = B = 0$.

(iii) Para $\lambda < 0$:

$$\begin{cases} B = 0 \\ B\cos\omega\pi + C\operatorname{sen}\omega\pi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = 0 \\ C = 0 \text{ ou } \omega = n \end{cases}$$

donde obtemos as soluções $X(x) = B\operatorname{sen}(nx)$ com $n = 1, 2, \ldots$ (correspondentes a $\omega = n$ e $\lambda = -n^2$).

Em consequência, a solução do problema de valores próprios é:

$$\lambda_n = -n^2 \quad , \quad X_n(x) = \operatorname{sen}(nx) \quad , \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo os possíveis valores de λ na equação para T e juntando a condição inicial já obtida, obtém-se:

$$T' + (n^2 + 2)T = 0.$$

As soluções desta equação são da forma $T(t) = Ke^{-(n^2+2)t}$, com $K \in \mathbb{R}$. Assim, podemos tomar $T_n(t) = e^{-(n^2+2)t}$.
As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são (a menos do produto por uma constante) funções da forma:

$$e^{-(n^2+2)t}\operatorname{sen}(nx) \quad \text{com} \quad n = 1, 2, 3\ldots$$

Procuramos agora uma solução formal do problema (3) que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas; ou seja:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n^2+2)t}\operatorname{sen}(nx)$$

Utilizando a condição inicial e o resultado da alínea (a), então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}(nx) = u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)\operatorname{sen}(nx).$$

Desta forma, $A_n = \frac{4}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)$.
Assim sendo, a solução (formal) do problema (3) é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)e^{-(n^2+2)t}\operatorname{sen}(nx). \tag{5}$$

(c) Para $x \in [0,\pi]$ e $t=0$, a série obtida reduz-se à série de senos da alínea (a). A extensão ímpar, $\bar{f}$ de f ao intervalo $[-\pi,\pi]$ é seccionalmente de classe C^1, tendo f e f' apenas descontinuidades em $x = \pm\frac{\pi}{2}$. Pelo teorema da convengência pontual das séries de Fourier, $u(x,0) = SS\bar{f}(x)$ converge em $[0,\pi]$.

Para $x \in [0,\pi]$ e $t > 0$ começamos por estimar o termo geral da série (5):

$$\begin{aligned}\left|\frac{4}{n}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right)e^{-(n^2+2)t}\,\mathrm{sen}(nx)\right| &\le \frac{8e^{-2t}}{n}e^{-n^2t} \le 8\big(e^{-nt}\big)^n \\ &\le 8\,\underbrace{(e^{-t})^n}_{r^n} \stackrel{\text{def}}{=} 8\,r^n\end{aligned}$$

Para $t > 0$, $r = e^{-t} \in]0,1[$, pelo que $\sum_{n=1}^{\infty} 8\,r^n$ é uma série geométrica convergente; pelo critério geral de comparação, a série (5) é absolutamente convergente.

[1,5 val.] 5. Mostre que o conjunto das funções $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diferenciáveis e que satisfazem

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = 3\sqrt[3]{y(t)^2}, \qquad y(1) = 1,$$

possui, pelo menos, dois elementos distintos. Explique porque razão este facto não contradiz o teorema de Picard-Lindeloff. Justifique **cuidadosamente** a sua resposta.

Resolução:

Seja $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que, para um dado intervalo aberto I, $y(t) \neq 0$, para todo o $t \in I$. Então, para $t \in I$,

$$y'(t) = 3(y(t))^{2/3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}(y(t))^{-2/3}y'(t) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(y(t)^{1/3}\right) = 1\,.$$

Então $y(t)$ resolve a equação diferencial dada no intervalo I se e só se, para esse intervalo, existe uma constante C tal que, para todo $t \in I$,

$$y(t)^{1/3} = t + C\,, \quad \text{ou seja,} \quad y(t) = (t+C)^3\,.$$

Se $1 \in I$, $y(1) = 1$ equivale a $1 = (1+C)^3$, ou seja, $C = 0$. Portanto, para todo $t \in I$, $y(t) = t^3$ e podemos considerar $I =]0,+\infty[$, já que nesse intervalo $y(t)$ não se anula. Observando que $\lim\limits_{t\to 0^+} y(t) = 0$, consideremos as duas funções $\hat{y}, \tilde{y}$ dadas por

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \hat{y}(t) = t^3\,, \qquad\qquad \tilde{y}(t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad t \le 0\,, \\ t^3 & \text{se} \quad t > 0\,. \end{cases}$$

São duas funções diferenciáveis em $\mathbb{R}$, satisfazem a condição inicial em $t=1$ e satisfazem a EDO pelo menos nos intervalos onde são diferentes de zero já que são da forma obtida atrás, tomando $C = 0$. Por outro lado, também satisfazem a EDO nos pontos onde se anulam:

$$\hat{y}'(0) = 0 \quad \text{e} \quad 3(\hat{y}(0))^{2/3} = 0\,,$$

$$\forall t \le 0\,, \quad \tilde{y}'(t) = 0 \quad \text{e} \quad 3(\tilde{y}(t))^{2/3} = 0\,.$$

Concluimos assim que ambas são soluções da EDO em todo $\mathbb{R}$.

Dado que a função $f(t,y) = 3y^{2/3}$ é de classe C^1 em $D = \{(t,y):\ y \neq 0\}$, logo localmente lipschitziana em D, e $(1,y(1)) = (1,1) \in D$, o PVI considerado satisfaz as hipóteses do teorema de Picard-Lindeloff. O facto de existirem duas soluções diferentes do PVI em $\mathbb{R}$ não contradiz a conclusão daquele teorema uma vez que esta só garante a unicidade localmente, isto é, só garante que para α suficientemente pequeno existe uma e uma só solução em $]1-\alpha, 1+\alpha[$. Mas como ambas as soluções coincidem em $]0,+\infty[$, a conclusão do teorema é válida.