Análise Complexa e Equações Diferenciais

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2014/2015

1º Teste, versão A

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LERC)

11 de Abril de 2015, 11h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.] 1. Escreva na forma $a + \mathrm{i}\, b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o número complexo dado por

$$(2\mathrm{i})^{2\mathrm{i}} + \operatorname{sen}(2\mathrm{i}).$$

[1,0 val.] 2. Calcule todas as soluções $z \in \mathbb{C}$, da equação

$$\left(z^3 - 8\mathrm{i}\right) e^z = 0.$$

[1,0 val.] 3. Esboce a região $R = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| < 2 \text{ e } \operatorname{Im}(z) > 0\}$ e a sua imagem $f(R)$, pela função $f(z) = \frac{1}{z}$.

[2,5 val.] 4. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x,y) = e^y \cos(x) - xy + 1$.

a) Determine uma função inteira $f = u + \mathrm{i}\, v$ tal que $f(\pi) = \mathrm{i}\pi^2$.

b) Calcule a função derivada $f'(x + \mathrm{i}\, y)$.

c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z+\mathrm{i})^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

[1,5 val.] 5. Determine o desenvolvimento em série de Laurent válido para $|z-1| > \sqrt{5}$ da função $f : \mathbb{C} \setminus \{1, -2\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2\mathrm{i})}\,.$$

[2,0 val.] 6. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{1}{(4z^2+1)^2} + \frac{2e^z}{z} + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{z-\pi}\right)\,.$$

a) Classifique todas as singularidades de f e determine os seus resíduos.

b) Usando a alínea anterior, calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(4x^2+1)^2}\, dx\,,$

[1,0 val.] 7. Considere ρ um real positivo arbitrário e $P(z)$ um qualquer polinómio em $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\oint_{|z|=\rho} P(\overline{z}) dz = \mathrm{i}\, 2\pi\rho^2 P'(0),$$

onde o caminho é percorrido uma vez no sentido directo.