Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

1º Teste, versão B

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LERC)

11 de Abril de 2015, 11h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.] 1. Escreva na forma $a + \mathrm{i}\, b$, com $a, b \in \mathbb{R}$, o número complexo dado por

$$(3\mathrm{i})^{3\mathrm{i}} + \cos(3\mathrm{i}).$$

Resolução:

Usando as definições de potência e cosseno complexo tem-se:

$$\begin{aligned}(3\mathrm{i})^{3\mathrm{i}} &= e^{3\mathrm{i}\log(3\mathrm{i})} = e^{3\mathrm{i}(\ln(3)+\mathrm{i}(\pi/2))} = e^{-3\pi/2} e^{\mathrm{i}3\ln(3)} \\ &= e^{-3\pi/2}\cos(3\ln(3)) + \mathrm{i}\, e^{-3\pi/2}\operatorname{sen}(3\ln(3))\end{aligned}$$

$$\cos(3\mathrm{i}) = \frac{e^{\mathrm{i}(3\mathrm{i})} + e^{-\mathrm{i}(3\mathrm{i})}}{2} = \frac{e^{-3} + e^{3}}{2},$$

logo

$$(3\mathrm{i})^{3\mathrm{i}} + \cos(3\mathrm{i}) = \frac{e^{-3} + e^{3}}{2} + e^{-3\pi/2}\cos(3\ln(3)) + \mathrm{i}\, e^{-3\pi/2}\operatorname{sen}(3\ln(3)).$$

[1,0 val.] 2. Calcule todas as soluções $z \in \mathbb{C}$, da equação

$$\left(z^3 + 8\mathrm{i}\right) e^{z} = 0.$$

Resolução:

Dado que $e^z \neq 0$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$, tem-se

$$\begin{aligned}\left(z^3 + 8\mathrm{i}\right) e^{z} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^3 = -8\,\mathrm{i} \quad \Leftrightarrow \quad z^3 = 8e^{-\mathrm{i}(\pi/2)} \\ &\Leftrightarrow \quad z = 2e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2}+2\pi k)/3} = 2e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3})}, \quad k = 0, 1, 2.\end{aligned}$$

[1,0 val.] 3. Esboce a região $R = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| < 2 \text{ e } \operatorname{Im}(z) < 0\}$ e a sua imagem $f(R)$, pela função $f(z) = \frac{1}{z}$.

Resolução:

A região R é o interior da circunferência de centro em 2 e raio 2 restrito ao interior do quarto quadrante. Logo a imagem pela inversão complexa $f(z) = \frac{1}{z}$ é dada por

$$f(R) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z) \text{ e } z \in R\} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(w) > \tfrac{1}{4} \text{ e } \operatorname{Im}(w) > 0\}.$$

[2,5 val.] 4. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $u(x, y) = e^y \operatorname{sen}(x) - x + y + \pi$.

a) Determine uma função inteira $f = u + \mathrm{i}\, v$ tal que $f(\pi) = -\mathrm{i}$.

b) Calcule a função derivada $f'(x + \mathrm{i}\, y)$.

c) Indique, justificando, o valor do integral

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz,$$

onde a circunferência é percorrida uma vez no sentido horário.

Resolução:

a) Para que $f = u + \mathrm{i}v$ seja inteira é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^y \operatorname{sen}(x) - x + y + \pi\right) = e^y \cos(x) - 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \operatorname{sen}(x) - x + y + \pi\right) = -e^y \operatorname{sen}(x) - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v(x, y) = e^y \cos(x) - y + C(x) \\ -e^y \operatorname{sen}(x) + C'(x) = -e^y \operatorname{sen}(x) - 1 \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = -1$ pelo que $C(x) = -x + C$ onde C é uma constante real. Como $f(\pi) = -\mathrm{i}$, tem-se $v(\pi, 0) = -1 \Leftrightarrow C = \pi$ e portanto

$$f(x + \mathrm{i}y) = e^y \operatorname{sen}(x) - x + y + \pi + \mathrm{i}(e^y \cos(x) - x - y + \pi).$$

b) Dado que f é diferenciável em qualquer $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ temos

$$f'(x + \mathrm{i}y) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} = e^y \cos(x) - 1 - \mathrm{i}(e^y \operatorname{sen}(x) + 1).$$

c) Sendo f inteira e $|\mathrm{i}| < 2$, a fórmula integral de Cauchy garante que

$$\oint_{|z|=2} \frac{f(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\, dz = -2\pi\mathrm{i} f'(\mathrm{i}) = -2\pi(1 + \mathrm{i}(e-1))$$

[1,5 val.] 5. Determine o desenvolvimento em série de Laurent válido para $|z+1| > \sqrt{5}$ da função $f : \mathbb{C}\setminus\{-1, 2\mathrm{i}\} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2\mathrm{i})}\,.$$

Resolução: Pela fórmula da soma da série geométrica obtemos

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z+1)(z-2\mathrm{i})} &= \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z-2\mathrm{i}} = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{1}{z+1-1-2\mathrm{i}} \\ &= \frac{1}{(z+1)^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1+2\mathrm{i}}{z+1}} = \frac{1}{(z+1)^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2\mathrm{i}}{z+1}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+2\mathrm{i})^n}{(z+1)^{n+2}} = \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1+2\mathrm{i}}{(z+1)^3} + \frac{(1+2\mathrm{i})^2}{(z+1)^4} + \dots \end{aligned}$$

Atendendo à região de validade da fórmula da série geométrica, a igualdade na linha do meio é válida se e só se

$$\left|\frac{1+2\mathrm{i}}{z+1}\right| < 1\,, \quad \Leftrightarrow \quad |z+1| > |1+2\mathrm{i}| = \sqrt{5},$$

o que estabelece a região de validade da série de Laurent obtida.

[2,0 val.] 6. Considere a função complexa de variável complexa f definida no seu domínio por

$$f(z) = \frac{1}{(9z^2+1)^2} + \frac{1+e^z}{z} + \cos\left(\frac{1}{z+\pi}\right) .$$

a) Classifique todas as singularidades de f e determine os seus resíduos.

b) Usando a alínea anterior, calcule $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(9x^2+1)^2}\,dx$,

Resolução:

a) Considere-se $f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z)$, com

$$f_1(z) = \frac{1}{(9z^2+1)^2}, \quad f_2(z) = \frac{1+e^z}{z} \quad \text{e} \quad f_3(z) = \cos\left(\frac{1}{z+\pi}\right).$$

As singularidades de f são $z = \pm\frac{\mathrm{i}}{3}$, provenientes de f_1, $z = 0$ e $z = -\pi$, provenientes de f_2 e f_3, respectivamente.

As funções f_1 e f_2 são holomorfas em $z = -\pi$, donde a sua contribuição para as correspondentes séries de Laurent de f, em torno destas singularidades, faz-se apenas na parte regular. A parte principal das séries de Laurent e, consequentemente, o resíduo neste ponto, provém apenas de f_3, pelo que podemos concluir que

$$\mathrm{Res}(f, -\pi) = \mathrm{Res}(f_3, -\pi).$$

Um argumento análogo sustenta que $\mathrm{Res}(f, 0) = \mathrm{Res}(f_2, 0)$ e $\mathrm{Res}(f, \pm\frac{\mathrm{i}}{3}) = \mathrm{Res}(f_1, \pm\frac{\mathrm{i}}{3})$.

Para $z = 0$ tem-se (usando, por exemplo, a regra de Cauchy):

$$\lim_{z\to 0} z\, f_2(z) \;=\; \lim_{z\to 0} z\,\tfrac{1+e^z}{z} \;=\; 2$$

pelo que esta singularidade é um pólo simples e $\mathrm{Res}(f, 0) = \mathrm{Res}(f_2, 0) = 2$.

Relativamente a $z = \pm\frac{\mathrm{i}}{3}$, e em conta que f_1 é uma função racional com numerador constante, a ordem dos zeros do denominador de f_1 leva-nos a concluir que se tratam de pólos de segunda ordem. Assim

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}(f, \pm\tfrac{\mathrm{i}}{3}) = \mathrm{Res}(f_1, \pm\tfrac{\mathrm{i}}{3}) &= \lim_{z\to\pm\mathrm{i}/3} \tfrac{d}{dz}\left((z\mp\mathrm{i}/3)^2 f_1(z)\right) \;=\; \lim_{z\to\pm\mathrm{i}/3} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{9^2(z\pm\mathrm{i}/3)^2}\right)\\ &= \frac{-2}{9^2(\pm\mathrm{i}/3\pm\mathrm{i}/3)^3} = \mp\frac{i}{12}.\end{aligned}$$

Expandindo f_3 em série de Laurent válida na região dada por $|z+\pi| > 0$:

$$f_3(z) = \cos\left(\frac{1}{z+\pi}\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(z+\pi)^2} + \frac{1}{4!}\frac{1}{(z+\pi)^4} - \frac{1}{6!}\frac{1}{(z+\pi)^6} + \cdots$$

Assim sendo, $z = -\pi$ é uma singularidade essencial de f_1 (e, também, de f), sendo que $\mathrm{Res}(f, -\pi) = \mathrm{Res}(f_1, -\pi) = a_{-1} = 0$.

b) Reconhecendo que $f_1(x) = \frac{1}{(9x^2+1)^2}$ é óbvio que $f_1(x) = f_1(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, f_1 é uma função par em $\mathbb{R}$. Por este facto,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(9x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f_1(x)\,dx\,.$$

Além disso, para cada $R > 1/3$

$$\int_{-R}^{R} f_1(x)\,dx \;=\; \oint_{\Gamma_R} f_1(z)\,dz - \int_{\gamma_R} f_1(z)\,dz$$

onde $\Gamma_R = [-R, R] + \gamma_R$ é o caminho de Jordan, positivamente orientado, com γ_R o arco de circunferência, dado por $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$.

Da alínea anterior tem-se que $f_1(z)$ é uma função racional com singularidades isoladas em $\pm\mathrm{i}/3$ em que a diferença de grau do polinómio denominador para o polinómio numerador não é inferior a 2, pelo que

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f_1(z)\,dz = 0\,,$$

e pelo teorema dos resíduos

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx &= \lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{+R} f_1(x)\,dx = \lim_{R\to+\infty}\oint_{\Gamma_R} f_1(z)\,dz - \lim_{R\to+\infty}\int_{\gamma_R} f_1(z)\,dz\\ &= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}(f_1,\mathrm{i}/3).\end{aligned}$$

Novamente usando a alínea anterior conclui-se,

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(9x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\,dx = \frac{1}{2}\,2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{12}\right) = \frac{\pi}{12}\,.$$

[1,0 val.] 7. Considere ρ um real positivo arbitrário e $P(z)$ um qualquer polinómio em $z\in\mathbb{C}$. Mostre que

$$\oint_{|z|=\rho} P(\overline{z})dz = \mathrm{i}\,2\pi\rho^2 P'(0),$$

onde o caminho é percorrido uma vez no sentido directo.

Resolução: Seja $P(z)$ um polinómio arbitrário

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1\,z + a_2\,z^2 + \cdots + a_n\,z^n.$$

Então

$$\oint_{|z|=\rho} P(\overline{z})dz = \sum_{k=0}^{n} a_k \oint_{|z|=\rho}\overline{z}^{\,k}\,dz,$$

para qualquer $n\in\mathbb{N}_0$. Por aplicação directa da definição de integral obtemos que

$$\oint_{|z|=\rho}\overline{z}^{\,k}\,dz = 0, \qquad \text{para } k=0,2,3,\ldots$$

e

$$\oint_{|z|=\rho}\overline{z}\,dz = \mathrm{i}\,2\pi\rho^2,$$

o que termina a demonstração. .