TÉCNICO LISBOA

Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

2º Teste, versão A

(CURSOS: LEIC-T, LEGI, LEE, LERC)

30 de Maio de 2015, 11h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.] 1. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' + \frac{3}{2+3t}\, y = t + 2.$$

[2,0 val.] 2. Considere a seguinte equação diferencial

$$(2t + \ln y) + (t/y)\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

Mostre que a equação é exacta e calcule, justificando, a solução da equação que verifica $y(1) = 1$ e o respectivo intervalo máximo de existência e unicidade.

[2,0 val.] 3. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t), \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[2,0 val.] 4. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + 2y = e^{5t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

[2,0 val.] 5. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de senos da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Indique a soma da série para cada $x \in [0,1]$.

(b) Determine a solução do problema, para $x \in [0,1],\ t > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u, \quad \begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

[1,0 val.] 6. Seja A uma matriz 2×2 e $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores não nulos, tais que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \text{e} \qquad A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine as soluções do sistema $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ da forma $\mathbf{Y}(t) = c(t)\mathbf{v} + d(t)\mathbf{w}$ onde c e d são funções escalares de variável real.