Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2014/2015

2º Teste, versão A

(Cursos: LEIC-T, LEGI, LEE, LERC)

30 de Maio de 2015, 11h00m

Duração: 1h 30m

[1,0 val.] 1. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' + \frac{3}{2+3t}\, y = t + 2.$$

Resolução:

A equação dada escreve-se na forma $y' + a(t)y = b(t)$, com

$$a(t) = \frac{3}{2+3t} \qquad \text{e} \qquad b(t) = t + 2,$$

pelo que é uma equação diferencial linear. Então escrevemos

$$y' + a(t)y = b(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d}{dt}\Big(e^{\mathrm{P}[a(t)]}y(t)\Big) = e^{\mathrm{P}[a(t)]}b(t),$$

ou seja,

$$e^{\mathrm{P}[a(t)]}y(t) = \mathrm{P}\Big[e^{\mathrm{P}[a(t)]}b(t)\Big] + C$$

onde C é uma constante real. Note-se que as primitivas envolvidas são imediatas com

$$e^{\mathrm{P}[a(t)]} = e^{\mathrm{P}[\frac{3}{2+3t}]} = e^{\ln(2+3t)} = 2 + 3t,$$

e

$$\mathrm{P}\Big[e^{\mathrm{P}[a(t)]}b(t)\Big] = \mathrm{P}\Big[(2+3t)(t+2)\Big] = t^3 + 4t^2 + 4t.$$

Então a solução geral da equação é

$$y(t) = \frac{t^3 + 4t^2 + 4t + C}{2+3t}.$$

[2,0 val.] 2. Considere a seguinte equação diferencial

$$(2t + \ln y) + (t/y)\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

Mostre que a equação é exacta e calcule, justificando, a solução da equação que verifica $y(1) = 1$ e o respectivo intervalo máximo de existência e unicidade.

Resolução:

Verifica-se que a equação é exacta porque

$$\frac{\partial}{\partial y}(2t + \ln y) = \frac{1}{y} = \frac{\partial}{\partial t}(t/y).$$

Sabemos então que a solução geral da equação é dada implícitamente por $\Phi(t, y) = C$, onde C é uma constante real e $\Phi(t, y)$ satisfaz:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, y) = 2t + \ln y, \tag{1}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\Phi(t, y) = t/y \tag{2}$$

Integrando a equação (2) em ordem a y obtemos

$$\Phi(t, y) = t\ln(y) + C(t) \tag{3}$$

e derivando em ordem a t e comparando com (1) concluímos que $C(t) = t^2$. A solução geral da equação é então dada implícitamente por

$$t\ln(y) + t^2 = C,$$

e a condição inicial determina o valor $C = 1$ pelo que a solução com a condição inicial indicada é

$$y(t) = e^{(1-t^2)/t}, \qquad \forall t \in \mathrm{I}_{max} =]0, +\infty[.$$

A unicidade da solução resulta do teorema de Picard-Lindelöf. De facto, a equação escreve-se

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad \text{com} \qquad f(t, y) = -y\frac{2t + \ln(y)}{t}$$

sendo que f é uma função de classe C^1 no seu domínio, o qual contém o ponto $(1, 1)$.

[2,0 val.] 3. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B}(t) = e^{-2t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule e^{At}.

(b) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{B}(t), \qquad \mathbf{Y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução:

(a) Dado que a matriz A é triangular superior os seus valores próprios são 3 e -2. Para os respectivos vectores próprios tem-se

$$(A - 3I)\mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{logo uma escolha possível é } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e

$$(A + 2I)\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{logo uma escolha possível é } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que a matriz A é diagonalizável, a sua forma canónica de Jordan é uma matriz diagonal, pelo que

$$A = S\,J\,S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

e consequentemente

$$e^{At} = S\,e^{Jt}\,S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{3t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

(b) Pela fórmula da variação das constantes, a solução do problema de valor inicial é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}(t) &= e^{At}\mathbf{Y}(0) + \int_0^t e^{A(t-s)}\,\mathbf{B}(s)\,ds \\
&= e^{At}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{3(t-s)} & e^{3(t-s)} - e^{-2(t-s)} \\ 0 & e^{-2(t-s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2s}\,ds \\
&= \left(\int_0^t \begin{bmatrix} e^{3t}e^{-5s} - e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} ds \right) \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t} - te^{-2t} \\ te^{-2t} \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

[2,0 val.] 4. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 3y' + 2y = e^{5t}, \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

Resolução:

A equação escreve-se na forma

$$\big(D^2 + 3D + 2\big)\big(y(t)\big) = e^{5t}, \tag{4}$$

onde $D = \frac{d}{dt}$. Além disso, o termo independente $b(t) = e^{5t}$ é solução da equação diferencial

$$(D-5)\big(b(t)\big) = 0.$$

Então a solução do problema de valor inicial (PVI) é também solução da equação homogénea

$$(D-5)\big(D^2 + 3D + 2\big)\big(y(t)\big) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (D-5)(D+1)(D+2)(y(t)) = 0.$$

Então escrevemos

$$y(t) = \underbrace{c_1e^{-2t} + c_2e^{-t}}_{y_h(t)} + \underbrace{d_1e^{5t}}_{y_p(t)}, \tag{5}$$

onde c_1, c_2, d_1 são constantes reais. Note-se que $y_h(t)$ é a solução geral da variante homogénea da equação (4) logo, para que (5) seja solução de (4), é necessário que

$$y_p'' + 3y_p' + 2y_p = e^{5t} \quad \Leftrightarrow \quad (25d_1 + 15d_1 + 2d_1)e^{5t} = e^{5t} \quad \Leftrightarrow \quad d_1 = 1/42.$$

Assim a solução geral da equação (4) é

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t} + \tfrac{1}{42}e^{5t}$$

logo calcular a solução do PVI passa por determinar c_1 e c_2 a partir dos valores iniciais. Então

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{42} = 0 \\ -2c_1 - c_2 + \frac{5}{42} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -c_1 - \frac{1}{42} \\ -c_1 = -\frac{6}{42} = -\frac{1}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2 = -\frac{1}{6} \\ c_1 = \frac{1}{7} \end{cases}$$

e a solução do PVI é

$$y(t) = \tfrac{1}{7}e^{-2t} - \tfrac{1}{6}e^{-t} + \tfrac{1}{42}e^{5t}.$$

[2,0 val.] 5. (a) Determine o desenvolvimento em série de Fourier de senos da função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

Indique a soma da série para cada $x \in [0,1]$.

(b) Determine a solução do problema, para $x \in [0,1],\ t > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3u, \quad \begin{cases} u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

Resolução:

(a) A série de senos de f tem a forma

$$SS[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi x),$$

onde

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$$

Tendo em conta a definição de $f(x)$ no intervalo $[0, \pi/2[$, tem-se:

$$\begin{aligned} b_n &= 2\int_0^{1/2}(-1)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx + 2\int_{1/2}^1 (1/2)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx \\ &= -2\left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_0^{1/2} + \left[\frac{-\cos(n\pi x)}{n\pi}\right]_{1/2}^1 \\ &= \frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(2+(-1)^n\right) \end{aligned}$$

Assim:

$$SSf(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(2+(-1)^n\right)\right)\operatorname{sen}(n\pi x).$$

Para $x \in [0,1]$ a série obtida é a série de Fourier da extensão ímpar de f ao intervalo $[-1,1]$. Esta é seccionalmente de classe C^1, tendo apenas descontinuidades em $x = \pm\frac{1}{2}$ e $x = 0$. Pelo teorema da convengência pontual das séries de Fourier, $SS[f](x)$ converge em $[0,1]$ com soma

$$SS[f](x) = \begin{cases} -1 & \text{se } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & \text{se } \frac{1}{2} < x < 1, \\ 0 & \text{se } x = 0, 1, \\ -\frac{1}{4} & \text{se } x = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

(b) Vamos procurar soluções não nulas da forma $u(x,t) = X(x)T(t)$ para a a equação diferencial parcial e condições auxiliares homogéneas. Substituindo na equação diferencial, obtemos:

$$X(x)T'(t) = X''(x)T(t) + 3X(x)T(t) \Leftrightarrow \frac{T'(t)}{T(t)} - 3 = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

onde λ é um número real qualquer. Esta igualdade é equivalente ao sistema,

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0. \\ T'(t) = -(\lambda - 3)T(t) \end{cases}$$

Das condições de fronteira, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ resulta, para as soluções não nulas da forma $T(t)X(x)$, que

$$T(t)X(0) = T(t)X(1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} X(0) = 0 \\ X(1) = 0 \end{cases}$$

A solução do problema de valores próprios (para $x \in [0,1]$):

$$X'' + \lambda X = 0 \qquad ; \qquad X(0) = X(1) = 0,$$

é dada por

$$\lambda_n = n^2\pi^2 \qquad , \qquad X_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x) \qquad , \quad \text{com } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Substituindo os possíveis valores de λ na equação para T e juntando a condição inicial já obtida, tem-se:

$$T' + (n^2\pi^2 - 3)T = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad T(t) = C_n e^{-(n^2\pi^2-3)t}$$

onde $C_n \in \mathbb{R}$.
As soluções da equação diferencial da forma $T(t)X(x)$ que satisfazem as condições de fronteira são funções da forma:

$$e^{-(n^2\pi^2-3)t}\operatorname{sen}(n\pi x) \qquad \text{com} \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Uma solução formal do problema que seja uma sobreposição das soluções acima obtidas; ou seja:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-(n^2\pi^2-3)t}\operatorname{sen}(n\pi x).$$

Utilizando a condição inicial e o resultado da alínea (a), então:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x) = u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(2+(-1)^n\right)\right)\operatorname{sen}(n\pi x).$$

Desta forma, $C_n = \frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(2+(-1)^n\right)$.
Assim sendo, a solução (formal) do problema é:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{n\pi}\left(2+(-1)^n\right)\right)e^{-(n^2\pi^2-3)t}\operatorname{sen}(n\pi x).$$

[1,0 val.] 6. Seja A uma matriz 2×2 e $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ vectores não nulos, tais que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \text{e} \qquad A\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v},$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$. Determine as soluções do sistema $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$ da forma $\mathbf{Y}(t) = c(t)\mathbf{v} + d(t)\mathbf{w}$ onde c e d são funções escalares de variável real.

Resolução: Para o sistema $\mathbf{Y}' = A\mathbf{Y}$, podem encontrar-se duas soluções linearmente independentes $\mathbf{Y}_1(t)$ e $\mathbf{Y}_2(t)$ em que ambas são combinações lineares dos vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. De facto, uma é $\mathbf{Y}_1(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, como se verifica de

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad e^{\lambda t}A\mathbf{v} = e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad A\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \tfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right),$$

e outra é $\mathbf{Y}_2(t) = e^{\lambda t}\left(\mathbf{w} + t\mathbf{v}\right)$. Para verificar esta última basta somar as equações

$$A\left(te^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = t\tfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\mathbf{v}\right),$$

e

$$e^{\lambda t}A\mathbf{w} = e^{\lambda t}\lambda\mathbf{w} + e^{\lambda t}\mathbf{v} \qquad \Leftrightarrow \qquad A\left(e^{\lambda t}\mathbf{w}\right) = \tfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\mathbf{w}\right) + e^{\lambda t}\lambda\mathbf{v},$$

com resultado

$$A\left(e^{\lambda t}\mathbf{w} + te^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = \tfrac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}\mathbf{w} + te^{\lambda t}\mathbf{v}\right).$$

Conclui-se que qualquer solução é da forma

$$\mathbf{Y}(t) = \alpha\mathbf{Y}_1(t) + \beta\mathbf{Y}_2(t) = \alpha e^{\lambda t}\mathbf{v} + \beta\left(e^{\lambda t}\mathbf{w} + te^{\lambda t}\mathbf{v}\right) = c(t)\mathbf{v} + d(t)\mathbf{w}$$

onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $c(t) = (\alpha + \beta t)e^{\lambda t}$ e $d(t) = \beta e^{\lambda t}$.