Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2° Semestre 2013/2014
17 de Março de 2014
Duração: 45 minutos

1° TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEAN - LEMat - MEAer - MEAmbi - MEMec - MEEC

1) (1.0) Para cada parâmetro real α, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha \end{array}\right].$$

Determine, justificando, os valores de α para os quais o sistema anterior é possível, e calcule a solução geral do sistema correspondente a $\alpha = 0$.

2) (1.0) Determine, justificando, a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que

$$A^T - I = \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - I \right)^{-1}.$$

3) (1.0) Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Factorize a matriz A na forma $A = LU$, obtendo uma matriz L triangular inferior só com 1's na diagonal principal e uma matriz U triangular superior.

4) (1.0) Considere os seguintes subespaços U e W de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L(\{(1,-1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\}) \qquad W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 2z = 0\}).$$

Determine, justificando, $v \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$U \cap W = L(\{v\}).$$

5) (0.5) Seja $\mathcal{P}_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere o seguinte subespaço de $\mathcal{P}_2$:

$$V = L\left(\left\{1 - t^2, t - t^2, 1 - t\right\}\right).$$

Determine, justificando, $u \in \mathcal{P}_2$ tal que

$$V + L(\{u\}) = \mathcal{P}_2.$$

6) (0.5) Sejam $A \in \mathcal{M}_{m\times p}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{m\times q}(\mathbb{R})$ tais que $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$. Mostre que existe $C \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R})$ tal que $A = BC$.