Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

8 de Novembro de 2002
Duração: 1h e 30 min.
Teste A

1^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (9 val.)

Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a característica, a nulidade e a dimensão do espaço das colunas de A_α em função do parâmetro α.

b) Diga quais são os valores de α para os quais A_α é invertível e nos casos em que A_α é invertível, calcule a entrada (2,2) da matriz inversa A_α^{-1}.

c) Para $\alpha = -1$, factorize a matriz A_{-1} na forma $A_{-1} = LDU$, obtendo uma matriz L triangular inferior com 1's na diagonal principal, uma matriz diagonal D e uma matriz U triangular superior com 1's na diagonal principal.

d) Para $\alpha = 2$, determine bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo de A_2.

e) Para $\alpha = 2$, determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_2 u = b$, onde b é igual à 3^a coluna da matriz A_2.

II (4 val.)

Seja P_2 o espaço linear de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a 2, munido das operações usuais.

a) Verifique que o conjunto $W = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : 2a_0 - a_1 = 3a_2\}$ é um subespaço de P_2.

b) Determine uma base para W e calcule as coordenadas do vector $p(t) = 3 + 2t^2$ nessa base.

III (4 val.)

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
$U = L(\{(2,-1,1),(-2,1,1)\})$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -2y\}$.

a) Determine bases para U e para V e calcule as respectivas dimensões.

b) Diga, justificando, quais as dimensões dos subespaços $U + V$ e $U \cap V$.

IV (3 val.)

a) Sejam V um espaço linear e $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Prove que o conjunto S é uma base de V se e só se todo o vector de V se escrever de maneira única como combinação linear dos elementos de S.

b) Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = av_1 + bv_2$ e $w_2 = cv_1 + dv_2$, com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Prove que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U se e só se $ad \neq bc$.