Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

22 de Junho de 2009
Duração: 3 h.

1º EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

I (6 val.)

Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

(1.2) **a)** Determine a característica e a nulidade de A_α em função do parâmetro α.

(1.2) **b)** Para $\alpha = 1$, determine uma base para o espaço das colunas e uma base para o núcleo de A_1.

(1.2) **c)** Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível e nos casos em que A_α é invertível, calcule (em função de α) a entrada (2,4) da matriz inversa A_α^{-1}.

(1.2) **d)** Para $\alpha = 2$, factorize a matriz A_2 na forma $A_2 = LDU$, obtendo uma matriz L triangular inferior com 1's na diagonal principal, uma matriz diagonal D e uma matriz U triangular superior com 1's na diagonal principal.

(1.2) **e)** Para $\alpha = 1$, determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_1 x = b$, onde b é igual à 4^a coluna da matriz A_1.

II (6 val.)

Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T_1(x, y, z) = (2x + y, y + 2z)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{S} = \{(2,1), (1,2)\}$ de $\mathbb{R}^2$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{S}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1.2) **a)** Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

(1.2) **b)** Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

(1.2) **c)** Diga, justificando, se se tem $\mathcal{N}(T_1) + \mathcal{I}(T_2) = \mathbb{R}^3$ e determine a dimensão de $\mathcal{N}(T_1) \cap \mathcal{I}(T_2)$.

(1.2) **d)** Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

(1.2) **e)** Determine a solução geral da equação $(T_1 \circ T_2)(x, y) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$.

III (6 val.)

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(1.2) **a)** Determine uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$ (o complemento ortogonal do núcleo de A).

(1.2) **b)** Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

(1.2) **c)** Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ e a distância entre $(1,2,3)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.

(1.2) **d)** Determine os valores próprios de A e os respectivos subespaços próprios.

(1.2) **e)** Justifique que a matriz A é diagonalizável e determine a matriz P^T de tal modo que a matriz $D = PAP^T$ seja diagonal. Determine (sem calcular P) a matriz D.

IV (2 val.)

Sejam A e B duas matrizes tais que $AB = BA$. Mostre que A e B têm um vector próprio em comum.

Sugestão: Sendo λ um valor próprio de A, considere C a matriz cujas colunas formam uma base ordenada $\mathcal{S}$ de $\mathcal{N}(A - \lambda I)$ e verifique que $(A - \lambda I)\, BC = \mathbf{0}$. Finalmente considere a matriz P cujas colunas são respectivamente as coordenadas das colunas de BC em relação à base $\mathcal{S}$ e sendo v um vector próprio de P mostre que Cv é um vector próprio comum a A e B.