Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

22 de Abril de 2006
Duração: 1h e 30 min.

Teste C

1^o TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: LEAmb, LEB, LEGM, LEM, LEMat, LEQ e LQ

Nome: **N^o:** **Curso:**

Apresente **todos** os cálculos e justificações relevantes.

(1 val.) **1.** Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq |2-x| - |x-3| < 1\}.$$

a) Verifique que $A = \left[\frac{5}{2}, 3\right[$.

b) Relativamente ao conjunto A, determine o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes. Determine, caso existam ou justifique se não existirem, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo de A.

(2 val.) **2.** Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$ ou mostre que não existem, os limites das seguintes sucessões de termos gerais.

a) $\dfrac{2n! - 3\log n^2}{(-2)^n - 3n!}$ **b)** $\dfrac{2^n n^2 \operatorname{sen}(n!)}{\sqrt{5^n}}$ **c)** $\dfrac{n}{4}\sqrt[n]{\dfrac{(2n+1)!}{(n!)^3}}$ **d)** $\dfrac{n^2}{(-n)^{-n}(n+1)^{n+1}}$

(2 val.) **3.** Considere a sucessão (u_n) de números reais definida por:

$$\begin{aligned} u_1 &= 1, \\ u_{n+1} &= \frac{3u_n - 2}{4} \quad \text{(para todo o } n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

a) Verifique que (u_n) é monótona.
b) Diga, justificando, se (u_n) converge e determine $\lim u_n$, se este existir.

(3 val.) **4.** Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) cada uma das seguintes séries e, relativamente às que forem convergentes, determine a soma de uma delas.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{-n+1}}{(-3)^n \, 4^{-n}}$ **b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(3^n n)}{\sqrt{2n^2-1}}$ **c)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+2}}{3^n n!}$ **d)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$

(1 val.) **5.** Estude quanto à natureza (convergência absoluta, convergência simples, divergência) a série de potências:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^3 3^n} (x+1)^n$$

(1 val.) **6.** Seja (a_n) uma sucessão decrescente de números reais tal que $a_n > 0$, para todo o $n \in \mathbb{N}$. Seja (b_n) uma sucessão de números reais positivos tal que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ converge. Indique, justificando, a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sqrt{a_n - a_{n+1}}$.