Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

25 de Janeiro de 2003
Duração: 3h.

2° EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (5 val.)

Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & \alpha & -2 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Determine a característica e a nulidade de A_α em função do parâmetro α.
b) Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.
c) Para $\alpha = 1$, calcule a entrada $(2, 2)$ da matriz inversa A_1^{-1}.
d) Para $\alpha = -1$, determine bases para o espaço das colunas e para o espaço nulo de A_{-1}.
e) Para $\alpha = -1$, determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_{-1}u = b$, onde $b = (0, 1, 0, 0)$.

II (2 val.)

Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - w = 0 \ \text{ e } \ y = 0\right\} \ \text{ e } \ V = L\left(\{(1, 1, 0, 0), (-1, -1, -1, 0)\}\right).$$

a) Diga, justificando, quais são as dimensões dos subespaços $U + V$ e $U \cap V$.
b) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua dois vectores de U. Determine uma base para $U \cap V$.

III (3 val.)

Considere o espaço linear P_1 de todos os polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Sejam $\mathcal{S}_1 = \{1, -1 + 2t\}$ e $\mathcal{S}_2 = \{1 - t, 1 + t\}$ duas bases (ordenadas) de P_1.
a) Determine a matriz $S_{\mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2}$ de mudança da base $\mathcal{S}_1$ para a base $\mathcal{S}_2$.
b) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in P_1$ em relação à base $\mathcal{S}_2$ são dadas por $(-1, 1)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base $\mathcal{S}_1$.
c) Determine a matriz $S_{\mathcal{S}_2 \to \mathcal{S}_1}$ de mudança da base $\mathcal{S}_2$ para a base $\mathcal{S}_1$.

IV (4 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T(x, y, z) = (x + 2y, -y, z - x - 2y, -2x + 2z - 4y).$$

a) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^4)$ que representa T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^4$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

b) Determine o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T. Diga se T é injectiva.
c) Determine o espaço imagem $\mathcal{I}(T)$ de T. Diga se T é sobrejectiva.
d) Determine a solução geral da equação $T(x, y, z) = (0, 0, 1, 2)$.

V (3 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.
b) Justifique que a matriz A é diagonalizável. Determine uma matriz de mudança de base S tal que a matriz $S^{-1}AS$ seja diagonal.
c) Seja B uma matriz invertível do tipo $n \times n$. Mostre que se λ é um valor próprio de B então λ^{-1} é um valor próprio de B^{-1}. Diga, justificando, qual é a relação existente entre os vectores próprios de B e os de B^{-1}.

VI (2 val.)

Considere no espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ (de todas as matrizes reais do tipo 2×2) o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr } (A^T B).$$

Considere também o seguinte subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = d \ \text{ e } \ b = c \right\}.$$

a) Determine uma base ortogonal para U e uma base para $U^{\perp}$.
b) Determine a distância de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ a U.

VII (1 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada pela matriz:

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz $M(T; \mathcal{S}_1; \mathcal{S}_2)$ que representa T em relação às bases $\mathcal{S}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{S}_2 = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ com:

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (-1, 0, 1), \quad u_3 = (0, 2, 1), \quad v_1 = (1, 1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1, 2).$$