Instituto Superior Técnico — 1º Semestre 2011/2012
Departamento de Matemática — 29 de Novembro de 2011
Duração: 45 minutos

2º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEAN, LEMat, MEAmbi, MEBiol e MEQ

1) Considere as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) (0.8) Determine uma base para $\mathcal{N}(A+B)$.

b) (0.8) Determine $\dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B))$.

2) Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$: $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y + z - w = 0\}$.

a) (0.8) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores de U.

b) (0.8) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,1,1,1)$ e $(-1,-1,1,1)$.

3) (0.7) Considere o espaço linear $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$.

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de U, com $\mathcal{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Considere ainda a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ dada por: $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Determine as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{B}_1$.

4) (0.7) Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Considere os seguintes subespaços lineares de $\mathcal{P}_2$:

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(1) = 0\} \qquad V_2 = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\}).$$

Determine uma base para $V_1 \cap V_2$.

5) (0.4) Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{L}(A) = \{\mathbf{0}\}$.