Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

21 de Dezembro de 2002
Duração: 1h e 30 min.
B

2° TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

I (8 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = (-2y - 4x, y + 2x, 0).$$

a) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente.
b) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T. Diga se T é injectiva.
c) Determine uma base para o espaço imagem $\mathcal{I}(T)$ de T. Diga se T é sobrejectiva.
d) Determine a solução geral da equação $T(x, y) = (-4, 2, 0)$.

II (6 val.)

Considere o espaço euclidiano $P_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ com o produto interno $\langle , \rangle : P_2 \times P_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definido da seguinte forma:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R}.$$

Considere também o subespaço $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = p(-1)\}$ de P_2.
a) Determine uma base ortonormada para U e uma base ortonormada para $U^\perp$.
b) Determine a projecção ortogonal do polinómio $1 + t$ sobre $U^\perp$.
c) Determine a distância de $1 + t$ a U.

III (4 val.)

Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.
b) Justifique que a matriz A é diagonalizável. Determine uma matriz de mudança de base S tal que a matriz $S^{-1}AS$ seja diagonal.

IV (2 val.)

Seja R uma matriz do tipo $n \times n$ tal que $\det R = 1$ e $RR^T = I$, em que I é a matriz identidade. Verifique que se n é ímpar então 1 é valor próprio de R.