Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

6 de Julho de 2009
Duração: 3 h.

2^o EXAME DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: LEMat, LEAN, MEAer, MEBiol, MEMec e MEQ

1) Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha^2-1 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) (1.6) Determine a característica e a nulidade de A_α em função do parâmetro α.

b) (1.6) Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível e nos casos em que A_α é invertível, verifique que a entrada (1,2) da matriz inversa $(A_\alpha)^{-1}$ é igual a $\dfrac{1}{\alpha+1}$.

c) (1.6) Para $\alpha = 2$, determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_2 x = b$, onde b é igual ao simétrico da 2^a coluna da matriz A_2.

2) Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x,y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) (1.6) Determine $T_2(0,1,0)$ e $T_2(0,0,1)$.

b) (1.6) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1 e diga, justificando, se T_1 é sobrejectiva.

c) (1.6) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_2)$ de T_2 e diga, justificando, se T_2 é injectiva.

d) (1.6) Determine a solução geral da equação $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$.

3) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual.

Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

a) (1.6) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

b) (1.6) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ e a distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$.

c) (1.6) Justifique que a matriz A é diagonalizável e determine a matriz P^{-1} de tal modo que a matriz $D = PAP^{-1}$ seja diagonal. Determine (sem calcular P) a matriz D.

4) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^4$ o seguinte subespaço: $U = L\left(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}\right)$. Determine uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U, isto é, tal que $U = \mathcal{N}(A)$.

5) (1.0) Defina o produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada.

6) (2.0) Sejam A uma matriz $m \times n$ e B uma matriz $n \times p$. Mostre que

$$\dim \mathcal{C}(AB) = \dim \mathcal{C}(B) - \dim\left(\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)\right).$$

Sugestão: Considere (no caso em que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B) \neq \{\mathbf{0}\}$) uma base $\{x_1, \ldots, x_s\}$ para $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(B)$ e suponha (no caso em que $AB \neq \mathbf{0}$) que $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(B)$. Mostre que $\{Ay_1, \ldots, Ay_t\}$ é uma base para $\mathcal{C}(AB)$.