Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

3 de Junho de 2006
Duração: 1h e 30 min.
Teste B

2^o TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA I

CURSOS: LEAmb, LEB, LEGM, LEM, LEMat, LEQ e LQ

(1,5 val.) **1.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} & \text{se } x \leq -1, \\[2ex] \dfrac{\log^3 (x+1)^2}{6} & \text{se } x > -1. \end{cases}$$

a) Diga, justificando, qual o valor de $\lim f\left(-2 - \dfrac{1}{n}\right)$.

b) Determine, justificando, a função derivada f'.

(1.5 val.) **2.** Determine, justificando, o contradomínio da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x-1} - 2 & \text{se } x \leq 0, \\[2ex] \dfrac{e^{2/x}}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(1 val.) **3.** Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k_1 e^{2-x} & \text{se } x \leq 2, \\[1ex] \log(x-1) - k_2 & \text{se } x > 2. \end{cases}$$

Determine k_1 e k_2 de modo a que f fique diferenciável em $\mathbb{R}$, e justifique que, com esses valores, a função f não tem extremos locais.

(1.5 val.) **4.** Determine, justificando, os intervalos de monotonia e os extremos locais da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x - 5 \operatorname{arctg} x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(2 val.) **5.** Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os seguintes limites.

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{e^x - \cos x - \operatorname{sen} x}{2x^2}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{1/\log x}$ **c)** $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\operatorname{sh} x} - \frac{1}{x}\right)$ **d)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} x^2 \log \cos \frac{1}{x}$

(1 val.) **6.** Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt[3]{2-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Determine o polinómio de Taylor de 1^a ordem da função f relativo ao ponto 1.

(1 val.) **7.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6x^2 - e^{-x-2} + 2x^3 - 3$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f tem exactamente 3 zeros.

(0.5 val.) **8.** Mostre que $\operatorname{arcsen} x + \arccos x > \operatorname{arctg} x$, para todo o $x \in [-1, 1]$.