Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

11 de Janeiro de 2005

5^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

CURSOS: Lic. Eng. Geológica e Mineira, Lic. Eng. de Materiais e Lic. Eng. Mecânica

ATENÇÃO: No caso de responder a mais do que dois grupos correspondentes a testes já entregues a prova **não** é válida.

I (1^o Teste - 5 val.)

1) Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) (1.0) Determine a característica de A_α em função do parâmetro α e diga quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.

b) (1.0) Determine o núcleo de A_0 ($\alpha = 0$), indicando o respectivo conjunto gerador.

2) (1.0) Determine a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

3) (1.0) Sejam $U = L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$ e $V = L(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$ dois subespaços de $\mathbb{R}^3$. Determine o subespaço $U \cap V$, indicando um conjunto gerador.

4) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível. Mostre que a inversa de A é única.

II (2^o Teste - 5 val.)

1) (0.8) Sejam $U = L(\{(1,2,1),(-1,1,-1)\})$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - z = 0\}$. Diga, justificando, quais as dimensões dos subespaços $U + V$ e $U \cap V$.

2) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y,z) = (x-y,0)$.

a) (0.8) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T)$ de T e diga se T é injectiva. Justifique.

b) (0.8) Determine a dimensão do contradomínio $\mathcal{I}(T)$ de T e diga se T é sobrejectiva. Justifique.

c) (0.8) Determine a solução geral da equação $T(x,y,z) = (1,0)$.

3) (0.8) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{S} = \{(1,2),(1,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T;\mathcal{S};\mathcal{S}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$.

4) (1.0) Seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de um espaço linear U. Considere os vectores $w_1 = v_1 + v_2$ e $w_2 = v_1 - v_2$. Prove que $\{w_1, w_2\}$ é também uma base de U.

III (3^o Teste - 5 val.)

1) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Determine a entrada $(4,4)$ da matriz inversa A^{-1}.

2) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seja $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ com $\det B = 2$. Calcule, justificando:

a) (0.5) $\begin{vmatrix} 1 & c & 1 \\ b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$ **b)** (0.5) $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 1/2 & b & 1/2 \\ 1 & 2 & c \end{vmatrix}$

3) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é representada pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) (0.5) Determine os valores próprios de T.

b) (1.0) Determine bases para os subespaços próprios de T.

c) (0.5) A matriz A é diagonalizável? Justifique.

4) (1.0) Uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ diz-se nilpotente se $A^l = \mathbf{0}$ para algum inteiro positivo l. Mostre que se A é nilpotente então o único valor próprio de A é 0.

IV (4^o Teste - 5 val.)

1) Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $U = L(\{(1,0,1),(0,1,1)\})$ um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

a) (1.0) Determine uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores geradores de U.

b) (1.0) Determine a projecção ortogonal de $(0,1,0)$ sobre U, isto é, $P_U(0,1,0)$.

c) (1.0) Determine a distância do ponto $(0,1,0)$ a U.

2) (1.0) Seja $P_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear dos polinómios de grau menor ou igual a 2. Considere a aplicação $\langle , \rangle : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \right\rangle = a_0 b_0 + 4 a_1 b_1 + a_2 b_2. \quad (*)$$

Seja $W = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : p(1) = p(-1)\}$ um subespaço de P_2.

Determine uma base ortonormada para $W^\perp$, relativamente ao produto interno (*).

3) (1.0) Seja V um espaço euclidiano real. Seja $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $\|T(w)\| = \|w\|$ para qualquer $w \in V$. Mostre que

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle u, v \rangle ,$$

para quaisquer $u, v \in V$.