Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

5 de Janeiro de 2004
Duração: 1 h e 30 min.

# $5^o$ TESTE DE ANÁLISE MATEMÁTICA II

CURSOS: LEAmb, LEB, LEC, LEQ, LET e LQ

**Nome:** **N$^o$:** **Curso:**

**ATENÇÃO**: Só pode responder a um ou a dois dos seguintes grupos. No caso de responder a mais do que dois grupos a prova **não** é válida.

## I ($1^o$ Teste - 5 val.)

Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

**a)** $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{1+\cos^2 x}$ **b)** $\dfrac{\log x}{x\sqrt{1-\log^2 x}}$ **c)** $\dfrac{x^5}{\sqrt{1-x^3}}$ **d)** $\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ **e)** $\dfrac{x-2}{(x+1)(x^2-1)}$

## II ($2^o$ Teste - 5 val.)

**1.** Calcule o integral: $\displaystyle\int_0^{1/2} x \arctan 2x \; dx$

**2.** Justifique a diferenciabilidade de $F(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{-1} \frac{t-x}{e^{t-x}} dt$ e calcule a sua derivada.

**3.** Calcule a área do seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 2 \;\text{ e }\; y \leq -x^2\}$$

**4.** Calcule, num intervalo apropriado, a soma da série: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{2n+3}$

**5.** Desenvolva em série de potências de $x-1$ (com $x_0 = 1$) a função $f(x) = x \log x$ e indique o maior intervalo aberto em que a série representa a função. Aproveite o desenvolvimento obtido para calcular a derivada de $5^a$ ordem de $f$ no ponto 1.

## III ($3^o$ Teste - 5 val.)

**1.** Seja $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \wedge x \neq 1\}$. Indique o interior e a fronteira de $A$. Diga, justificando, se $A$ é aberto, fechado, limitado ou conexo.

**2.** Calcule ou mostre que não existem os seguintes limites:

**a)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\sin x}{x^2+y^4}$ **b)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^3y^2}{y^4+x^6}$ **c)** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

**3.** Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x^2+y^2}, \quad \text{com} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \;\text{ e }\; (x,y) \neq (0,0)\}.$$

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações.

**a)** Existe uma sucessão em $D$ que não tem qualquer subsucessão convergente.
**b)** Qualquer sucessão em $D$ possui uma subsucessão convergente para um ponto de $D$.
**c)** O conjunto $f(D)$ é um intervalo.
**d)** A função $f$ não tem mínimo em $D$.
**e)** Se $(x_n, y_n) \subset D$ é tal que $(x_n, y_n) \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ então para qualquer subsucessão $(x_{n_l}, y_{n_l})$ de $(x_n, y_n)$ tem-se $f(x_{n_l}, y_{n_l}) \to \sqrt{2}$.

## IV ($4^o$ Teste - 5 val.)

**1.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

**a)** Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
**b)** Determine $f'_{(1,1)}(0,0)$. A função $f$ é diferenciável em $(0,0)$? Justifique.

**2.** Considere a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por: $\varphi(x,y) = (\log(x^2y^2+1), \arctan(xy))$. Seja $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por: $\psi(s,t) = \cosh s \cos t$. Defina $(\psi \circ \varphi)'(1,-1)$.

**3.** Seja $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}^3$ e considere a função $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por: $F(x,y) = G(e^x y, x-y, xe^y)$. Verifique que se tem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(-1,-1) + \frac{\partial F}{\partial y}(-1,-1) = 0.$$

**4.** Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = x^2 - x^2y^2 + y^2$. Determine, caso existam, os extremos relativos e absolutos de $g$.